Groupe de travail "R-espaces symétriques" (2007/08) :
les séries classiques des R-espaces symétriques

Notations : $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ = la matrice unité d'ordre n,

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & \\ & -\mathbf{1}_q \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & I_{p,q} & \\ 1 & & \end{pmatrix};$$

$\omega(x,y) := x^t J y$ (forme symplectique sur $\mathbb{K}^{2m}$) ;
$\alpha(x,y) := x^t F y$ (forme quadratique neutre sur $\mathbb{K}^{2m}$).
$\mathrm{Gras}_p(V)$: la variété Grassmannienne des p-espaces dans un espace vectoriel V ;
$\mathrm{Lag}(V,\beta)$: la variété Lagrangienne des espaces maximales isotropes d'une forme β .

Si $A \in M(n,n;\mathbb{K})$, l'*algèbre de Lie A-orthogonale* est

$$\mathfrak{o}(A,\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) |\, X^t A + AX = 0\}.$$

Noter que $\mathfrak{o}(F,\mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(I_{m,m},\mathbb{K}) =: \mathfrak{o}(m,m;\mathbb{K})$ et $\mathfrak{o}(B,\mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(p+1,q+1;\mathbb{K})$. Pour p,q avec $p+q=n$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ est munie de la 3-graduation

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\mathfrak{g}_1 \cong M(p,q;\mathbb{K})$, $\mathfrak{g}_{-1} \cong M(q,p;\mathbb{K})$ et $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{gl}(p,\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{gl}(q,\mathbb{K})$. Dans les séries I, II, III, les algèbres classiques $\mathfrak{sl}(n,\mathfrak{k})$, $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{K})$ et $\mathfrak{o}(F,\mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(n,n;\mathbb{K})$ héritent cette 3-graduation de $\mathfrak{gl}(n)$, resp. de $\mathfrak{gl}(2n)$.

(1) Les 4 séries de géométries projectives généralisées simples complexes. Ce sont certaines paires d'espaces homogènes de la forme $(\mathcal{X}^+,\mathcal{X}^-) = (G/P^-, G/P^+)$; on appellera G le "groupe conforme" ou "groupe projectif" de $\mathcal{X}^+$, resp. de $\mathcal{X}^-$. Dans la suite, il faut lire $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (mais ces familles existent pour tout corps $\mathbb{K}$).

$\mathrm{I}_{p,q}(\mathbb{K})$: Grassmannienne
$(\mathcal{X}^+,\mathcal{X}^-) = (\mathrm{Gras}_p(\mathbb{K}^n), \mathrm{Gras}_q(\mathbb{K}^n)) = (\mathbb{P}\mathrm{Gl}(n,\mathbb{K})/P^+, \mathbb{P}\mathrm{Gl}(n,\mathbb{K})/P^-)$
$\mathrm{II}_m(\mathbb{K})$: Lagrangienne symplectique
$(\mathcal{X}^+,\mathcal{X}^-) = (\mathrm{Lag}(\mathbb{K}^{2m},\omega), \mathrm{Lag}(\mathbb{K}^{2m},\omega)) = (\mathrm{Sp}(m,\mathbb{K})/P^+, \mathrm{Sp}(m,\mathbb{K})/P^-)$
$\mathrm{III}_m(\mathbb{K})$: Lagrangienne orthogonale
$(\mathcal{X}^+,\mathcal{X}^-) = (\mathrm{Lag}(\mathbb{K}^{2m},\alpha), \mathrm{Lag}(\mathbb{K}^{2m},\alpha)) = (\mathrm{O}(m,m;\mathbb{K})/P^+, \mathrm{O}(m,m;\mathbb{K})/P^-)$
$\mathrm{IV}_n(\mathbb{K})$: Quadrique projective $\{[x] \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^{p+q+2}) |\, x^t B x = 0\}$
$(\mathcal{X}^+,\mathcal{X}^-) = (\mathcal{X},\mathcal{X})$ où $\mathcal{X} = (\mathrm{SO}(p+1,q+1;\mathbb{K})/((\mathrm{SO}(p,q;\mathbb{K}) \rtimes \mathbb{K}^*) \rtimes \mathbb{K}^n)$,

Remarque : pour les séries I, II, III, disons qu'une paire $(E,F) \in \mathcal{X}^+ \times \mathcal{X}^-$ est *transverse* (notation: $E \top F$) si $\mathbb{K}^n = E \oplus F$. Alors l'ensemble $M := (\mathcal{X}^+ \times \mathcal{X}^-)^\top$ des paires transverses est un ouvert dense de $\mathcal{X}^+ \times \mathcal{X}^-$, et c'est un espace symétrique de la forme G/S où S est le "groupe de structure de la paire de Jordan (V^+, V^-) (cf. tableau (3) ci-dessous). Pour le type IV, la même remarque s'applique, avec la relation $[v] \top [w]$ ssi $v^t B w \neq 0$. Cela donne

$\mathrm{I}_{p,q}$: Grassmannienne $M \cong \mathrm{Gl}(p+q,\mathbb{K})/(\mathrm{Gl}(p,\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}(q,\mathbb{K}))$
II_m : Lagrangienne symplectique $M \cong \mathrm{Sp}(m,\mathbb{K})/\mathrm{Gl}(m,\mathbb{K})$
III_n : Lagrangienne orthogonale $M \cong \mathrm{O}(m,m)/\mathrm{Gl}(m,\mathbb{K})$
IV_n : Quadrique projective $M \cong \mathrm{SO}(p+1,q+1)/(\mathrm{SO}(p,q) \times \mathrm{SO}(1,1))$

(2) Les 4 séries d'espaces hermitiens symétriques compacts simples : Pour les séries I, II, III, fixons le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$. Ceci donne une identification $p : \mathcal{X}^+ \to \mathcal{X}^-$, en associant à E son supplémentaire orthogonal $E^\perp$. Le groupe compact U, intersection du groupe projectif avec le groupe unitaire du produit scalaire, agit transitivement sur $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ \cong \mathcal{X}^-$, qui devient ainsi un espace symétrique compact. Cet espace est hermitien car G et donc U agissent de manière $\mathbb{C}$-différentiable.

$\mathrm{I}_{p,q}$: Grassmannienne $\mathcal{X} = \mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$
II_m : Lagrangienne symplectique $\mathcal{X} \cong \mathrm{Sp}(m)/\mathrm{U}(m)$
III_m : Lagrangienne orthogonale $\mathcal{X} \cong \mathrm{SO}(2m)/\mathrm{U}(m)$
IV_n : Quadrique projective $\mathcal{X} \cong \mathrm{SO}(n+2)/(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(2))$

Remarque : en prenant sur $\mathbb{C}^n$ la forme $\beta(z,w) = z^t I_{r,s} \overline{w}$ au lieu d'un produit scalaire, on obtient des espaces *pseudo-hermitiens* symétriques $\{E \in \mathcal{X}^+ | \beta|_{E \times E} \text{ nondeg.}\}$, dont les composantes connexes sont des U'-orbites ouverts dans $\mathcal{X} = G/P$, avec $U' = G \cap \mathrm{U}(r,s)$. En particulier, pour $(r,s) = (p,q)$ dans le cas $\mathrm{I}_{p,q}$ (resp. $(r,s) = (m,m)$ dans les cas II_m et III_m), on obtient ainsi le *dual de type non-compact* de l'espace compact :

$\mathrm{I}_{p,q}$: "boule matricielle" $M_{nc} = \mathrm{U}(p,q)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$
II_m : "boule des matrices symétriques" $M_{nc} \cong \mathrm{Sp}(m,\mathbb{R})/\mathrm{U}(m)$
III_m : "boule des matrices antisymétriques" $M_{nc} \cong \mathrm{SO}^*(2m)/\mathrm{U}(m)$
IV_n : "boule de Lie" $M_{nc} \cong \mathrm{SO}(n,2)/(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(2))$

(3) Les 4 séries d'algèbres de Lie complexes simples 3-graduées et leurs paires de Jordan $(V^+, V^-) = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1})$ associées :

$\mathrm{I}_{p,q}$: Grassmannienne
$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, Euler $E = I_{p,q}$, $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}) = (M(p,q;\mathbb{C}), M(q,p;\mathbb{C}))$
II_n : Lagrangienne symplectique
$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$, Euler $E = I_{n,n}$, $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}) = (\mathrm{Sym}(n;\mathbb{C}), \mathrm{Sym}(n;\mathbb{C}))$
III_n : Lagrangienne orthogonale
$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n,n;\mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})$, Euler $E = I_{n,n}$, $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}) = (\mathrm{Asym}(n;\mathbb{C}), \mathrm{Asym}(n;\mathbb{C}))$
IV_n : Quadrique projective : $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(B;\mathbb{K}) \cong \mathfrak{o}(p+1,q+1,\mathbb{K})$ avec 3-graduation :

$$E = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0_n & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g} \ni X = \begin{pmatrix} 0 & & \\ x & 0 & \\ 0 & -x^t I_{p,q} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & & \\ & A & \\ & & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y^t I_{p,q} & 0 \\ & 0 & y \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

où $x, y \in \mathbb{K}^n, a \in \mathbb{K}, A \in \mathfrak{o}(p,q)$.

Remarque : les algèbres exceptionnelles de type E_6 et E_7 admettent une 3-graduation, les autres non.

(4) Les formes réelles des 4 séries de géométries projectives généralisées simples complexes. Ce sont des géométries $(\mathcal{Y}^+, \mathcal{Y}^-)$, fixés dans une géométrie complexe $(\mathcal{X}^+, \mathcal{X}^-)$ par une conjugaison complexe τ (automorphisme anti-holomorphe d'ordre 2). Le "groupe conforme de $\mathcal{Y}^\pm$" est la forme réelle G^τ de celui de $\mathcal{X}^\pm$ fixée par τ.

$\mathrm{I}_{p,q}(\mathbb{C})$: 3 types de formes réelles
- a) $\mathrm{I}_{p,q}(\mathbb{R})$ Grassmannienne réelle $\mathcal{Y}^+ = \mathrm{Gl}(p+q,\mathbb{R})/P$
- b) $\mathrm{I}_{p',q'}(\mathbb{H})$ Grassmannienne quaternionenne $\mathcal{Y}^+ = \mathrm{Gl}(p'+q',\mathbb{H})/P$ (si $p = 2p'$, $q = 2q'$ paires)
- c) $\mathrm{Lag}(\mathbb{C}^{2m},\beta) = \mathrm{SU}(m,m)/P$, où $\beta(z,w) = z^t F \overline{w}$: Lagrangienne hermitienne (si $p = q = m$)

$\mathrm{II}_m(\mathbb{C})$: 2 types de formes réelles
- a) $\mathrm{II}_m(\mathbb{R})$ Lagrangienne symplectique réelle $\mathcal{Y}^+ = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/P$
- b) $\mathrm{Lag}(\mathbb{H}^{2m},\gamma) = \mathrm{Sp}(m,m)/P$: Lagrangienne hermitienne sur $\mathbb{H}$ (si m est pair)

$\mathrm{III}_m(\mathbb{C})$: 2 types de formes réelles
- a) $\mathrm{III}_m(\mathbb{R})$ Lagrangienne orthogonale réelle $\mathcal{Y}^+ = \mathrm{SO}(m,m;\mathbb{R})/P$
- b) $\mathrm{Lag}(\mathbb{H}^{2m},\delta) = \mathrm{SO}^*(2m)/P$: une autre Lagrangienne hermitienne sur $\mathbb{H}$ (si m est pair)

$\mathrm{IV}_n(\mathbb{C})$: une famille de n formes réelles
- j) quadrique projective réelle $\mathrm{IV}_{j,n-j}(\mathbb{R})$, $j = 1,\ldots,n$

(5) : Les R-espaces symétriques simples : Il y a deux types : les espaces hermitiens symétriques compacts (tableau (2)), et leurs formes réelles, que l'on obtient en choisissant une involution de Cartan pour le groupe conforme G^τ des géométries du tableau (4). On obtient ainsi:

$\mathrm{I}_{p,q}(\mathbb{C})$: 3 types de formes réelles
- a) Grassmannienne réelle $\mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q))$
- b) $\mathrm{I}_{p',q'}(\mathbb{H})$ Grassmannienne quaternionenne $\mathrm{Sp}(n)/(\mathrm{Sp}(p')\times\mathrm{Sp}(q'))$
- c) $\mathrm{Lag}(\mathbb{C}^{2n},\beta) \cong \mathrm{U}(n)$ (cas du groupe !) Lagrangienne hermitienne (si $p = q = n$)

$\mathrm{II}_n(\mathbb{C})$: 2 types de formes réelles
- a) $\mathrm{II}_n(\mathbb{R})$ Lagrangienne symplectique réelle $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$
- b) $\mathrm{Lag}(\mathbb{H}^{2n},\gamma) = \mathrm{Sp}(n)$ (cas du groupe !) : Lagrangienne hermitienne sur $\mathbb{H}$ (si n est pair)

$\mathrm{III}_n(\mathbb{C})$: 2 types de formes réelles
- a) $\mathrm{III}_n(\mathbb{R})$: Lagrangienne orthogonale réelle $\mathrm{Lag}(\mathbb{R}^{2n},F) \cong \mathrm{O}(n)$ (cas du groupe !)
- b) $\mathrm{Lag}(\mathbb{H}^{2n},\delta) = \mathrm{U}(2n)/\mathrm{Sp}(n)$: une autre Lagrangienne hermitienne sur $\mathbb{H}$ (si n est pair)

$\mathrm{IV}_n(\mathbb{C})$: une famille de n formes réelles
- j) quadrique projective réelle $\mathrm{IV}_{j,n-j}(\mathbb{R})$, $j = 1,\ldots,n$

Remarque : la liste de classification analogue des formes réelles des espaces pseudo-Hermitiens symétriques est très longue (voir Springer LNM **1754**, chap. XII). Essentiellement, tous les espaces symétriques classiques semi-simples (liste de Berger, Ann. Sci. ENS, 1957) y apparaissent et sont donc des "pseudo R-espaces symétriques". Attention cependant : le cas du groupe $\mathrm{U}(n)$ est un R-espace symétrique, mais $\mathrm{SU}(n)$ ne l'est pas (sauf pour $n = 2$) ! (En effet, dans ce cas, un tore maximal $\mathfrak{t}$ est donné par les matrices diagonales ; pour $\mathrm{U}(n)$ le réseau unitaire $\Gamma = \{X \in \mathfrak{t} | \exp(X) = \mathbf{1}\}$ est bien cubique, avec base cubique les matrices monomiales, tandis que pour $\mathrm{SU}(n)$ il n'existe pas de base orthonormée de ce réseau.) Il en est de même pour toutes les parties semi-simples des espaces dont la liste figure en fin de la partie (7) (p.ex., $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$, partie semi-simple de $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$, etc.)

(6) Systèmes triples de Jordan positives correspondants aux R-espaces :

$\mathrm{I}_{p,q}(\mathbb{C})$: $V = M(q,p;\mathbb{C})$, $T(X,Y,Z) = X\overline{Y}^t Z + Z\overline{Y}^t X$
a) Grassmannienne réelle $V = M(q,p;\mathbb{R})$, $T(X,Y,Z) = XY^tZ + ZY^tX$
b) Grassmannienne quaternionenne $V = M(q,p;\mathbb{H})$, $T(X,Y,Z) = X\overline{Y}^t Z + Z\overline{Y}^t X$
c) $\mathrm{Lag}(\mathbb{C}^{2n},\beta)$ Lagrangienne hermitienne, $V = \mathrm{Herm}(n,\mathbb{C})$ (si $p = q = n$)
$\mathrm{II}_n(\mathbb{C})$: $V = \mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$, $T(X,Y,Z) = X\overline{Y}Z + Z\overline{Y}X$
a) Lagrangienne symplectique réelle $V = \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, $T(X,Y,Z) = XYZ + ZYX$
b) $\mathrm{Lag}(\mathbb{H}^{2n},\gamma)$, $V = \mathrm{Herm}(m,\phi,\mathbb{H})$ (si n est pair)
$\mathrm{III}_n(\mathbb{C})$: $V = \mathrm{Asym}(n,\mathbb{C})$, $T(X,Y,Z) = -X\overline{Y}Z - Z\overline{Y}X$
a) Lagrangienne orthogonale réelle $V = \mathrm{Asym}(n,\mathbb{R})$, $T(X,Y,Z) = -XYZ - ZYX$
b) $\mathrm{Lag}(\mathbb{H}^{2n},\delta)$: $\mathrm{Herm}(m,\mathbb{H})$ (si n est pair)
$\mathrm{IV}_n(\mathbb{C})$: $V = \mathbb{C}^n$, $T(x,y,z) = x^tzy - x^tyz - z^tyx$
j) quadrique projective réelle $V = \mathbb{R}^n$, $T(x,y,z) = x^tI_{p,q}zy - x^tI_{p,q}yz - z^tI_{p,q}yx$

(7) Géométries de première et de deuxième espèce. Les propriétés suivantes sont équivalentes, et on dit alors que la géométrie $(\mathcal{X}^+,\mathcal{X}^-)$ est *de première espèce* :

(i) "$\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}^-$", ou encore "il existe un isomorphisme *canonique* entre $\mathcal{X}^+$ et $\mathcal{X}^-$" ;
(ii) il existe un $\mathfrak{sl}_2$ triplet P,E,Q dans $\mathfrak{g}$ avec $E = \mathrm{Euler} \in \mathfrak{g}_0$, $P \in \mathfrak{g}_1$, $Q \in \mathfrak{g}_{-1}$;
(iii) la paire de Jordan (V^+,V^-) provient d'une *algèbre de Jordan* V : $(V^+,V^-) = (V,V)$.

Parmi les géométries du tableau (1), et parmi leurs formes réelles (tableau (4)), les suivantes sont de *première espèce* :

- $\mathrm{I}_{p,q}$ avec $p = q$;
- II_m pour tout m ;
- III_m pour m paire ;
- IV_m pour tout m.

Les algèbres de Jordan correspondantes sont les séries classiques :

- $\mathrm{I}_{p,q}$ avec $p = q = m$: $V = M(m,m;\mathbb{K})$
- II_m pour tout m : $V = \mathrm{Sym}(m,\mathbb{K})$
- III_m pour $m = 2k$ paire : $V = \mathrm{Asym}(2k,\mathbb{K}) \cong \mathrm{Sym}(J,\mathbb{K})$
- IV_m pour tout m : $V = \mathbb{K}^n$ ("facteur spin" ; lié aux algèbres de Clifford).

Finalement, c'est un fait remarquable que parmi les formes de réelles du tableau (4) il y a, pour chaque espace complexe de première espèce, exactement une qui est un espace symétrique avec un centre de dimension un (c'est le dual compact du *cône symétrique* associé à la forme réelle euclidienne de l'algèbre de Jordan de la liste précédente; cf. [Faraut-Koranyi, "Analysis on symmetric cones"]) :

- $\mathrm{I}_{m,m}$, c) : $\mathrm{U}(n)$, dual de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})/\mathrm{U}(n)$ = cône des matrices herm. déf. pos.
- II_m, a) : $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$, dual de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ = cône des matrices sym. déf. pos.
- III_{2k}, b) : $\mathrm{U}(2n)/\mathrm{Sp}(n)$, dual de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{H})/\mathrm{Sp}(n)$ = cône des matrices herm. quat. déf. pos.
- IV_{m+1}, forme réelle $S^m \times S^1/\pm$, dual du cône de Lorentz dans $\mathbb{R}^{m+1}$.