UFR MIAE
École Doctorale IAEM
Université de Lorraine
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Lorraine

en Mathématiques

par

Arnaud Souvay

Une approche intrinsèque des foncteurs de Weil

Soutenue publiquement le 23 novembre 2012

Membres du Jury :

Lionel Bérard-Bergery	Professeur, Nancy
Wolfgang Bertram	Professeur, Nancy (Directeur de thèse)
Martin Bordemann	Professeur, Mulhouse (Rapporteur)
Jan Slovák	Professeur, Brno (Rapporteur)

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Résumé

Nous construisons un foncteur de la catégorie des variétés sur un corps ou un anneau topologique $\mathbb{K}$, de caractéristique arbitraire, dans la catégorie des variétés sur $\mathbb{A}$, où $\mathbb{A}$ est une *algèbre de Weil*, c'est-à-dire une $\mathbb{K}$-algèbre de la forme $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est un idéal nilpotent. Le foncteur correspondant, noté $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$, et appelé *foncteur de Weil*, peut être interprété comme un foncteur d'extension scalaire de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{A}$. Il est construit à l'aide des polynômes de Taylor, dont nous donnons une définition en caractéristique quelconque.

Ce résultat généralise à la fois des résultats connus pour les variétés réelles ordinaires, et les résultats obtenus dans le cas des foncteurs tangents itérés et dans le cas des anneaux de jets ($\mathbb{A} = \mathbb{K}[X]/(X^{k+1})$). Nous montrons que pour toute variété M, $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ possède une structure de fibré polynomial sur M, et nous considérons certains aspects algébriques des foncteurs de Weil, notamment ceux liés à l'action du « groupe de Galois » $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$. Nous étudions les *connexions*, qui sont un outil important d'analyse des fibrés, dans deux contextes différents : d'une part sur les fibrés $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, et d'autre part sur des fibrés généraux sur M, en suivant l'approche d'Ehresmann. Les opérateurs de *courbure* d'une connexion sont induits par l'action du groupe de Galois $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ et ils forment une obstruction à l'« intégrabilité » d'une connexion $\mathbb{K}$-lisse en une connexion $\mathbb{A}$-lisse.

Mots-clés : foncteur de Weil, algèbre de Weil, calcul différentiel sur un anneau, extension scalaire, polynômes de Taylor, fibré polynomial, jet, connexion affine, connexion d'Ehresmann, courbure.

Abstract

We construct a functor from the category of manifolds over a general topological base field or ring $\mathbb{K}$, of arbitrary characteristic, to the category of manifolds over $\mathbb{A}$, where $\mathbb{A}$ is a so-called *Weil algebra*, i.e. a $\mathbb{K}$-algebra of the form $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{N}$, where $\mathcal{N}$ is a nilpotent ideal. The corresponding functor, denoted by $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$, and called a *Weil functor*, can be interpreted as a functor of scalar extension from $\mathbb{K}$ to $\mathbb{A}$. It is constructed by using Taylor polynomials, which we define in arbitrary characteristic.

This result generalizes simultaneously results known for ordinary, real manifolds, and results for iterated tangent functors and for jet rings ($\mathbb{A} = \mathbb{K}[X]/(X^{k+1})$). We show that for any manifold M, $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ is a polynomial bundle over M, and we investigate some algebraic aspects of the Weil functors, in particular those related to the action of the "Galois group" $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$. We study *connections*, which are an important tool for the analysis of fiber bundles, in two different contexts : connections on the Weil bundles $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, and connections on general bundles over M, following Ehresmann's approach. The *curvature* operators are induced by the action of the Galois group $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ and they form an obstruction to the "integrability" of a $\mathbb{K}$-smooth connection to an $\mathbb{A}$-smooth one.

Keywords : Weil functor, Weil algebra, Differential calculus on ring, Scalar extension, Taylor polynomial, polynomial bundle, jet, affine connection, Ehresmann connection, curvature.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Wolfgang qui a encadré ma thèse pendant quatre ans. C'est lui qui m'a donné pour la première fois l'impression de faire vraiment des mathématiques et la possibilité d'y apporter quelque chose de personnel. Il m'a encouragé depuis le Master et m'a fait découvrir la recherche. Pour cela, je lui en suis infiniment reconnaissant. Merci également pour ses conseils, sa gentillesse et son recul.

J'adresse de sincères remerciements à Martin Bordemann et Jan Slovák qui ont accepté de rapporter ma thèse et ont fait l'effort d'être présents durant la soutenance. Merci pour leurs rapports intéressants et pertinents.

Je remercie Lionel Bérard-Bergery d'avoir accepté de faire partie du jury. Merci aussi et surtout pour ses cours passionnants : j'y ai appris de belles mathématiques avec une approche très originale et élégante.

J'ai trouvé à l'IECN des conditions de travail idéales et je tiens à en remercier chaleureusement tout le personnel scientifique et administratif. J'en profite pour remercier les doctorants de mon équipe et en particulier Julien, pour son aide pendant mon mémoire et au début de ma thèse, mais surtout pour avoir instauré les pauses-café qui ont permis aux doctorants de se rencontrer, Cyril pour sa gentillesse mais surtout pour l'initiation à la fabrication de la bière et Fernando parce que connaître un carreleur c'est toujours utile. Merci également à Lucas pour les yaourts à l'ananas, MicHaël pour son imitation de « la soucoupe et le perroquet », Ghislain et Élodie pour les parties d'Horreur à Arkham, Aurélien, malgré les traces de pneu sur mon carrelage, pour son bon goût et ses conseils bd, musée, musique et cinéma toujours pertinents, Christophe pour m'avoir offert de somptueux T-shirts, Takashi parce que j'ai bien l'intention de passer dans sa famille au Japon, Romain pour ses remarques bienveillantes quand j'étais son enseignant, Renaud pour son comportement normal en toutes circonstances, Armand pour sa bonne humeur et sa passion des pêches, Jérôme pour nos longues conversations, Paul pour ses bûches. Merci aussi à Aline, Antoine, Aurélia, Bertrand, Henri, Jean-François, Li, Maxime, Sylvain et Vincent.

Merci à M. Bernard, mon professeur de mathématiques en terminale, qui m'a montré qu'il est possible de prendre du plaisir en mathématiques et d'enseigner de manière non scolaire.

Merci à mes parents, qui m'ont toujours soutenu, qui ont relu mon manuscrit et qui ont préparé mon pot de thèse.

Merci enfin à Julie, pour m'avoir supporté sans râler pendant toutes ces années.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique

Les origines

L'article fondateur de la théorie des *algèbres de Weil* et des *foncteurs de Weil* est l'article d'André Weil (1906-1998) intitulé *Théorie des points proches sur les variétés différentiables* [Weil 1953]. L'idée de Weil est de considérer une *algèbre locale* $\mathbb{A}$, aujourd'hui appelée algèbre de Weil, c'est-à-dire essentiellement une extension scalaire de dimension finie du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels par des éléments nilpotents. À partir d'une telle algèbre, il construit un foncteur dans la catégorie des variétés réelles de dimension finie qui, à toute variété M, associe une variété que l'on peut considérer comme une extension de M aux éléments nilpotents, en un certain sens que nous préciserons.

Cet article peut être considéré comme la réponse de Weil à l'article de Charles Ehresmann (1905-1979) intitulé *Les prolongements d'une variété différentiable* [Ehresmann 1951] et publié deux ans avant celui de Weil, dans lequel il présente la *théorie des jets*. Ehresmann y définit les jets d'ordre k en un point x comme étant des classes d'équivalences d'applications lisses, où deux applications lisses sont dites équivalentes si et seulement si elles ont même valeur en x, de même que leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre k. Cette notion, bien qu'étant un outil extrêmement puissant en géométrie différentielle, possède quelques inconvénients parmi lesquels l'utilisation d'un passage au quotient. Weil propose un point de vue différent sur la théorie des jets et définit les $\mathbb{A}$-*points proches* de points d'une variété M comme étant les morphismes d'algèbres des fonctions lisses $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ sur M dans l'algèbre de Weil $\mathbb{A}$. La théorie des fibrés de Weil englobe la théorie des jets dans le sens où les k-jets sont obtenus comme des $\mathrm{J}^k\mathbb{R}$-points proches, où $\mathrm{J}^k\mathbb{R} = \mathbb{R}[X]/(X^{k+1})$ est une algèbre de Weil appelée *algèbre des k-jets.*

Les méthodes de calcul infinitésimal de Pierre de Fermat (1601-1665), développées dans l'article [Fermat 1636], constituent une source d'inspiration plus ancienne. Afin de déterminer les extrema d'une fonction polynomiale, Fermat utilisait le critère suivant : si un point x est un extremum d'une fonction f, alors $f(x)$ est *adégal*[1] à l'évaluation de f en tout point *infiniment proche* de x, noté sous la forme $x + \varepsilon$. Afin de rendre compte de l'infinie proximité entre $x + \varepsilon$ et x, Fermat s'autorisait à interpréter ε comme un élément non nul au premier ordre, mais

1. Fermat utilisait la notion d'adégalité, représentée par le signe d'adégalité $\approx$, sans jamais l'avoir définie, mais celle-ci se comporte exactement comme l'égalité.

nul au second. Il considérait alors l'adégalité $f(x) \approx f(x+\varepsilon)$, qu'il divisait par ε puis il posait $\varepsilon = 0$, ce qui ne manque pas de surprendre. Notez bien que Fermat ne considère pas vraiment la limite de $\dfrac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$: il ne disposait ni de la notion de limite, formalisée au XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle par Karl Weierstrass (1815-1897), ni de la notion de dérivée, développée indépendamment par Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) à la fin du XVII$^{\mathrm{e}}$ siècle. Dans le cas des fonctions polynomiales, les opérations décrites ci-dessus reviennent à considérer que ε est en fait un élément nilpotent d'ordre 2, c'est-à-dire $\varepsilon^2 = 0$, et à résoudre l'égalité $f(x) = f(x+\varepsilon)$. Fermat n'a bien entendu jamais écrit ses calculs de cette manière, mais ce raisonnement est équivalent au sien, et c'est en tout cas comme cela que Weil interprète son travail.

Remarquez que, pour considérer des points infiniment proches de points réels, il a fallu introduire des éléments nilpotents qui ne sont pas eux-mêmes des réels. C'est précisément ce en quoi consiste la démarche de Weil. Il s'agit de donner un sens à la notion de points infiniment proches de points sur une variété M. De tels points ne peuvent pas appartenir eux-mêmes à la variété et il s'agit alors, afin de formaliser la notion d'infinie proximité, de construire une autre variété qui est en fait un fibré sur M dont la fibre en tout point x de M est précisément définie comme étant l'ensemble des points proches de x.

Afin de donner une idée de ce que sont les fibrés de Weil et de ce que peuvent être les points infiniment proches d'une variété, nous allons considérer l'exemple de l'*anneau tangent*

$$\mathrm{T}\mathbb{R} := \mathbb{R}[X]/(X)^2 \simeq \mathbb{R} \oplus \varepsilon\mathbb{R}, \text{ avec } \varepsilon^2 = 0,$$

qui est à la fois le plus élémentaire, mais également l'exemple historique, puisque c'est celui qui correspond à la méthode de Fermat. Dans ce cas, la variété étendue d'une variété M est simplement le fibré tangent $\mathrm{T}M$ et les points proches d'un point x de M sont précisément les vecteurs tangents au point x. Un tel vecteur sera noté $x + \varepsilon v$ et nous pourrons effectuer des calculs algébriques de manière habituelle, en utilisant la nilpotence de ε. En ce sens, nous pouvons considérer que deux vecteurs tangents au même point, c'est-à-dire qui diffèrent par un élément nilpotent de la forme εv, sont infiniment proches à l'ordre 1.

Comprenez qu'en fait, l'algèbre de Weil encode la notion de proximité dont nous voulons nous servir. Il est possible d'utiliser des notions de proximité plus fines, en considérant par exemple des éléments nilpotents d'ordre supérieur, ou d'autres notions de proximité, faisant intervenir des familles d'éléments nilpotents d'ordre deux qui commutent entre eux. La première idée correspond à la théorie des jets, et la seconde, à la théorie *tangente itérée*.

Il existe essentiellement deux points de vue sur la construction des foncteurs de Weil :

1. le point de vue dit *contravariant*, qui est inspiré par la géométrie algébrique ; c'est notamment l'approche utilisée par Weil, par Morimoto dans son article [Morimoto 1976], par Muñoz, Rodriguez et Muriel dans leur article [Muñoz, Muriel, Rodríguez 2000], par Demazure et Gabriel dans leur livre [Demazure, Gabriel 1970], et par Moerdijk et Reyes dans leur livre [Moerdijk, Reyes 1991],
2. le point de vue dit *covariant*, correspondant plutôt à la géométrie différentielle, et qui est inspiré par la géométrie différentielle synthétique, théorie développée dans le livre [Kock 1981]. C'est l'approche que nous utiliserons car elle permet une généralisation naturelle aux cas de dimension infinie notamment.

Le livre [Kolář, Michor, Slovák 1993] présente les deux approches et fait le lien entre les deux dans le cadre classique, c'est-à-dire en dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Le point de vue d'André Weil

L'article de Weil est très court, mais extrêmement riche et contient de nombreuses idées qui ont été et sont encore étudiées aujourd'hui, c'est pourquoi nous allons présenter les principaux résultats qui y sont obtenus.

Algèbres de Weil

Commençons par définir les *algèbres locales* ou algèbres de Weil.

Définition 1.1.1. *Une* algèbre de Weil *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre unitaire commutative associative de dimension finie de la forme* $\mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$*, où* $\mathring{\mathbb{A}}$ *est un idéal nilpotent.*

Nous dirons qu'un élément $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{A}$ se décompose en une *partie finie* $x_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ et *une partie nilpotente* $x_{\mathring{\mathbb{A}}}$ appartenant à $\mathring{\mathbb{A}}$ si $\boldsymbol{x} = x + x_{\mathring{\mathbb{A}}}$.

Il existe deux constructions naturelles d'algèbres de Weil à partir de deux algèbres de Weil $\mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ et $\mathbb{B} = \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$:

1. le *produit tensoriel* $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{B} = \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathring{\mathbb{B}}$,
2. la *somme de Whitney* $\mathbb{A} \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{B} := \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{B} / \mathring{\mathbb{A}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathring{\mathbb{B}} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$.

Exemples 1.1.2. Les anneaux suivants sont des algèbres de Weil :

1. $\mathrm{T}\mathbb{R} := \mathbb{R}[X]/(X)^2 \simeq \mathbb{R} \oplus \varepsilon\mathbb{R}$, avec $\varepsilon^2 = 0$, qui est l'exemple fondateur,
2. $\mathrm{J}^k\mathbb{R} := \mathbb{R}[X]/(X)^{k+1} \simeq \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{1 \le i \le k} \delta^k\mathbb{R}$, avec $\delta^{k+1} = 0$, appelé *anneau des k-jets*, qui correspond à la théorie des jets d'Ehresmann,
3. $\mathrm{T}^k\mathbb{R} := \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/(X_1^2, \dots, X_n^2) \simeq \mathrm{T}\mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathrm{T}\mathbb{R}$, appelé *anneau tangent itéré*,
4. $\mathbb{W}_n^k := \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/(X_1, \dots, X_n)^{k+1}$, appelé *anneau des* (k, n)*-vitesses.*

Ce dernier exemple est très général puisque toute algèbre de Weil en est un quotient, comme le montre la proposition suivante. De plus, les exemples importants s'expriment en fonction des anneaux de vitesses : $\mathrm{J}^k\mathbb{R} = \mathbb{W}_1^k$ et $\mathrm{T}^k\mathbb{R} = \mathbb{W}_1^1 \otimes \dots \otimes \mathbb{W}_1^1$.

Proposition 1.1.3. *Toute algèbre de Weil est un quotient de* $\mathbb{W}_n^k$*, où* $n+1$ *est la dimension de* $\mathbb{A}$ *et* $k+1$ *le degré de nilpotence de* $\mathring{\mathbb{A}}$*.*

Démonstration. Soit $(1 = a_0, a_1, \dots, a_n)$ une base de $\mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$. Soit k un entier tel que $\mathring{\mathbb{A}}^{k+1} = 0$. Alors l'application suivante est bien définie, et est un homomorphisme d'algèbres :

$$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/(X_1, \dots, X_n)^{k+1} \to \mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}}, \quad [P] \mapsto (P(0, \dots, 0), P(a_1, \dots, a_n)).$$

$\square$

Il est possible de choisir k et n minimaux : $k+1$ est le degré de nilpotence de $\mathring{\mathbb{A}}$ et n est la dimension de $\mathring{\mathbb{A}} / \left(\mathring{\mathbb{A}}^2 \right)$ (voir l'article [Kolář 2008]).

Weil a considéré cette famille d'algèbres car elle est suffisamment large pour contenir les anneaux de jets, et elle est stable par produit tensoriel, ce qui sera important dans la suite.

Points proches

Dans toute la suite, les variétés considérées seront toujours réelles et de dimension finie.

Soit x un point d'une variété M. On définit $I(x) \subset \mathcal{C}^\infty(M) := \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ comme étant l'idéal des fonctions lisses sur M qui s'annulent en x. Alors, pour tout entier naturel k, $I(x)^k$ est l'idéal des fonctions lisses qui s'annulent en x, de même que leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre k. Nous avons alors l'isomorphisme suivant :

$$\mathcal{C}^\infty(M)/I(x)^{k+1} \simeq \mathbb{R}[[X_1,\ldots X_n]]/(X_1,\ldots,X_n)^{k+1} = W_n^k.$$

Par convention, on note

$$\mathcal{C}^\infty(M)/I(x)^\infty := \mathbb{R}[[X_1,\ldots X_n]].$$

Ces isomorphismes s'interprètent de la manière suivante : pour toute série formelle, il existe une fonction dont le développement de Taylor *formel* en x est égal à cette série.

Nous pouvons maintenant définir la notion de points proches de points d'une variété.

Définition 1.1.4. *Soient M une variété et $\mathbb{A}$ une algèbre de Weil. Un* $\mathbb{A}$-point proche d'un point x de M *est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(M) \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_x"'] & \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \arrow[d, "\mathrm{pr}_\mathbb{R}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

où l'application $\mathrm{ev}_x : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ est l'application d'évaluation au point x. Ceci revient à dire que, pour toute fonction lisse f, la partie finie de $X(f)$ est $f(x)$.

Proposition 1.1.5. *Soient x un point d'une variété M et $\mathbb{A}$ une algèbre de Weil. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{A}$ de la forme $X(f) = f(x) + L(f)$, avec $L : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathring{\mathbb{A}}$, est un morphisme d'algèbres de Weil.*
2. *L'application $L : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathring{\mathbb{A}}$ est linéaire et vérifie la propriété suivante :*

$$L(fg) = L(f)g(x) + f(x)L(g) + L(f)L(g).$$

Si, de plus, l'algèbre de Weil $\mathbb{A}$ est l'anneau tangent $\mathrm{T}\mathbb{R}$, alors l'ensemble des $\mathbb{A}$-points proches de x est l'ensemble des vecteurs tangents au point x.

Démonstration. La partie finie ev_x d'un $\mathbb{A}$-point proche d'un point x de M est fixée et un $\mathbb{A}$-point proche dépend donc uniquement de sa partie nilpotente L. Il est donc entièrement déterminé par la donnée d'un morphisme d'algèbres $L : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathring{\mathbb{A}}$ tel que pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, on a $X(f) = f(x) + L(f)$. Pour tous f et g dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, nous avons

$$\begin{aligned} X(fg) &= X(f)X(g) \\ &= (f(x)+L(f))(g(x)+L(g)) \\ &= f(x)g(x) + L(f)g(x) + f(x)L(g) + L(f)L(g). \end{aligned}$$

Finalement, la donnée d'un $\mathbb{A}$-point proche de x est équivalente à la donnée d'une application linéaire $L : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathring{\mathbb{A}}$, telle que pour tous f et g dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, la propriété suivante soit vérifiée :

$$L(fg) = L(f)g(x) + f(x)L(g) + L(f)L(g).$$

Si $\mathring{\mathbb{A}}$ est nilpotent d'ordre 2, alors $L(f)L(g)$ est nul, et L vérifie la *règle de Leibniz*

$$L(fg) = L(f)g(x) + f(x)L(g).$$

Si $\mathbb{A}$ est l'anneau tangent $\mathrm{T}\mathbb{R}$, alors la donnée d'un $\mathrm{T}\mathbb{R}$-point proche d'un point x est équivalente à la donnée d'une application linéaire $L : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz, c'est-à-dire d'un vecteur tangent au point x. $\square$

Théorème 1.1.6. *L'ensemble ${}^{\mathbb{A}}M$ des $\mathbb{A}$-points proches de points de M possède une structure de variété et est appelé* prolongement de M d'espèce $\mathbb{A}$. *Si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors la variété ${}^{\mathbb{A}}V$ possède une structure naturelle de $\mathbb{A}$-module isomorphe à $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.*

La dernière assertion suggère que le foncteur de Weil peut s'interpréter comme un foncteur d'extension scalaire, ce que nous ferons dans la suite.

Le prolongement d'espèce $\mathbb{A}$ préserve les produits cartésiens :

$${}^{\mathbb{A}}(M \times N) \simeq {}^{\mathbb{A}}M \times {}^{\mathbb{A}}N.$$

Cette propriété est fondamentale car elle caractérise les foncteurs de Weil, comme nous le verrons ci-dessous.

Prolongement d'applications

Après avoir défini le prolongement des variétés, il est naturel de chercher à faire correspondre, à toute application $\varphi : M \to N$, une application ${}^{\mathbb{A}}\varphi : {}^{\mathbb{A}}M \to {}^{\mathbb{A}}N$ entre les prolongements des variétés M et N.

Définition 1.1.7. *Soient φ une application lisse entre deux variétés M et N, et X un $\mathbb{A}$-point proche d'un point x de M. Alors la composition à droite par φ*

$$r_\varphi : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad f \mapsto f \circ \varphi$$

est un morphisme d'algèbres et l'application

$$\begin{array}{cccccc} X \circ r_\varphi : & \mathcal{C}^\infty(N) & \to & \mathcal{C}^\infty(M) & \to & \mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \\ & g & \mapsto & g \circ \varphi & \mapsto & X(g \circ \varphi) = \big(g(\varphi(x)), L(g \circ \varphi)\big) \end{array}$$

est un $\mathbb{A}$-point proche du point $\varphi(x)$ de N. L'application ${}^{\mathbb{A}}\varphi : {}^{\mathbb{A}}M \to {}^{\mathbb{A}}N$, $X \mapsto X \circ r_\varphi$ est appelée prolongement de φ d'espèce $\mathbb{A}$. *Le diagramme suivant commute alors*

$$\pi_N \circ {}^{\mathbb{A}}\varphi = \varphi \circ \pi_M : \quad \begin{array}{ccc} {}^{\mathbb{A}}M & \xrightarrow{{}^{\mathbb{A}}\varphi} & {}^{\mathbb{A}}N \\ {\scriptstyle \pi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow[\varphi]{} & N \end{array}$$

où la projection $\pi_M : {}^{\mathbb{A}}M \to M$ est l'application naturelle, qui à un point proche d'un point x de M associe ce même point x.

Le prolongement d'applications possède des propriétés très agréables : par exemple, si G est un groupe de Lie, alors ${}^{\mathbb{A}}G$ est également un groupe de Lie. La multiplication et l'inversion dans ${}^{\mathbb{A}}G$ sont simplement les prolongements ${}^{\mathbb{A}}m$ et ${}^{\mathbb{A}}i$ des multiplication et inversion m et i dans G.

Le théorème suivant indique que la composition des foncteurs se comporte exactement comme le foncteur associé au produit tensoriel, ce qui justifie d'avoir défini une catégorie des algèbres de Weil qui soit stable par produit tensoriel.

Théorème 1.1.8. *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux algèbres de Weil, et φ une application lisse entre deux variétés M et N. Alors on a les isomorphismes canoniques suivants :*

$$^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}M \simeq {}^{\mathbb{B}}\left({}^{\mathbb{A}}M\right) \text{ et } {}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}\varphi \simeq {}^{\mathbb{B}}\left({}^{\mathbb{A}}\varphi\right).$$

Applications proches et transformations infinitésimales

Après avoir considéré les points proches de points d'une variété, nous pouvons définir la notion d'applications proches.

Définition 1.1.9. *Une* $\mathbb{A}$-application *entre deux variétés M et N est une application F définie sur M et à valeurs dans ${}^{\mathbb{A}}N$. On note $f(x)$ le point de N dont $F(x)$ est proche, ce qui définit une application $f : M \to N$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & {}^{\mathbb{A}}N \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

On dit alors que F est proche de *$f : M \to N$. Si, de plus, f est l'identité sur M (et donc si $M = N$), alors l'application $F : M \to {}^{\mathbb{A}}M$ est une section de π_M, et est appelée* transformation infinitésimale d'espèce $\mathbb{A}$ de *M.*

L'ensemble des sections de l'application $\pi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est exactement l'ensemble des applications proches de l'identité. Weil a énoncé le théorème suivant, qui munit cet ensemble d'une structure de groupe.

Théorème 1.1.10. *L'ensemble des transformations infinitésimales d'espèce $\mathbb{A}$ de M possède une structure de groupe pour la loi*

$$G \cdot F := \mu_M^{\mathbb{A}} \circ {}^{\mathbb{A}}G \circ F,$$

avec $\mu_M^{\mathbb{A}}$ défini par :

$$\mu_M^{\mathbb{A}} : {}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}M \to {}^{\mathbb{A}}M,\ X \mapsto \mu^{\mathbb{A}} \circ X,$$

où $\mu^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \to \mathbb{A}, a \otimes a' \mapsto aa'$ est un morphisme d'algèbres.

Exemple 1.1.11. Si $\mathbb{A}$ est l'anneau tangent $\mathrm{T}\mathbb{R}$, alors l'ensemble des transformations infinitésimales d'espèce $\mathbb{A}$ de M est l'ensemble des champs de vecteurs sur M. La multiplication dans ce groupe est donnée par l'addition fibre à fibre dans le fibré tangent. Nous obtenons alors une structure de groupe *commutatif*, ce qui est particulier à l'anneau tangent : en général, le groupe obtenu n'est *pas* commutatif.

Notez que tout morphisme d'algèbres de Weil $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ induit, pour toute variété M, une application $\Phi_M : {}^{\mathbb{A}}M \to {}^{\mathbb{B}}M$, définie de la manière suivante :

$$\Phi_M(X) := \Phi \circ X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{B}.$$

Caractérisation des foncteurs de Weil

Le théorème suivant, qui a été prouvé indépendamment par Eck, Kainz-Michor et Luciano, respectivement dans les articles [Eck 1986], [Kainz, Michor 1987] et [Luciano 1988], montre à quel point les foncteurs de Weil sont généraux.

Théorème 1.1.12. *Tout foncteur local F sur la catégorie des variétés réelles de dimension finie, à valeurs dans la catégorie des variétés réelles de dimension finie, et qui préserve les produits cartésiens, est un foncteur de la forme $M \mapsto {}^{\mathbb{A}}M$, où $\mathbb{A} = F(\mathbb{R})$.*

La notion de localité est un peu technique, sachez simplement que si le foncteur n'est pas local, alors $F(\mathbb{R})$ est un point.

Notez que ce théorème décrit comment déterminer l'algèbre de Weil à laquelle le foncteur est associé, non seulement en tant qu'ensemble, mais également en tant qu'algèbre puisque pour connaître l'addition $+_{\mathbb{A}}$ et le produit $\cdot_{\mathbb{A}}$ dans l'algèbre $\mathbb{A}$, il suffit d'appliquer le foncteur à l'addition $+_{\mathbb{R}}$ et au produit $\cdot_{\mathbb{R}}$ réels.

Autres approches et généralisations

À la fin de son article, Weil indique des pistes à suivre et dit qu'il a plusieurs idées et théorèmes qui feront l'objet d'articles ultérieurs, mais n'a plus écrit d'articles sur ce thème par la suite. Par ailleurs, il semble que cet article a été complètement ignoré pendant 20 ans, jusqu'à ce que Morimoto publie l'article [Morimoto 1976], où il reprend les idées principales de Weil et les résume.

Le livre [Kolář, Michor, Slovák 1993] développe les deux approches, à savoir l'approche contravariante (celle de Weil) et l'approche covariante, plus proche de la géométrie différentielle, qui permet la construction d'un foncteur, noté cette fois $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$. On y trouve le lien entre ces deux approches ainsi que le théorème suivant :

Théorème 1.1.13 (Kolář, Michor, Slovák)**.** *Soient M une variété réelle de dimension finie et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Weil de dimension finie. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathbb{A}) = {}^{\mathbb{A}}M \to T^{\mathbb{A}}M.$$

Le problème est que ceci n'est plus vrai en général si M est de dimension infinie. Ainsi, même dans le cas de l'anneau tangent réel $\mathrm{T}\mathbb{R}$, il existe des variétés pour lesquelles cette application n'est ni injective ni surjective. Dans ce cas, il vaut mieux travailler avec l'approche covariante, ce que nous ferons par la suite.

D'autres personnes ont poursuivi l'étude des foncteurs de Weil, notamment dans l'article [Kriegl, Michor 1996] en dimension infinie dans le cadre du *convenient calculus* développé dans le livre [Kriegl, Michor 1997], dans l'article [Doupovec, Kolář 2000], où est étudiée la théorie de l'itération, c'est-à-dire de la composition des foncteurs de Weil, dans l'article [Muñoz, Muriel, Rodríguez 2000] où est poursuivie l'approche de Weil en lien avec la notion d'éléments de contact, ou encore Shurygin, dans de nombreux articles, notamment [Shurygin 1993], [Shurygin 1999], [Shurygin 2002] et [Shurygin 2010], dont nous venons de prendre connaissance très récemment, et qui présente des liens avec notre approche, bien que le cadre soit différent puisqu'il travaille dans le cadre classique des variétés réelles de dimension finie.

1.2 Principaux résultats

Le sujet de cette thèse est la construction et l'étude des foncteurs de Weil généralisés, où le terme *généralisé* signifie : en dimension arbitraire (finie ou infinie) et sur un corps ou un anneau topologique de base général. Comparée à la littérature existante sur les foncteurs de Weil, notre approche apporte deux nouveaux aspects : d'une part, l'extension de la théorie dans un cadre très général comportant par exemple les corps de *caractéristique positive* et les variétés de *dimension infinie*, et d'autre part l'introduction du point de vue d'*extension scalaire*, bien connue en géométrie algébrique, dans le contexte de la géométrie différentielle. Cet aspect est nouveau, même dans le cadre classique des variétés réelles de dimension finie.

1.2.1 Cadre différentiel

Une approche élémentaire à la géométrie et au calcul différentiels sur des corps ou des anneaux topologiques $\mathbb{K}$ a été définie et étudiée dans les livres [Bertram, Glöckner, Neeb 2004, Bertram 2008] ; voir le livre [Bertram 2011] pour une présentation élémentaire. Le terme *lisse* se réfère toujours au concept qui y est expliqué et qui est appelé *cubic smooth* dans l'article [Bertram 2010]. L'anneau de base $\mathbb{K}$ est un anneau topologique, commutatif unitaire tel que le groupe $\mathbb{K}^\times$ des éléments inversibles soit dense dans $\mathbb{K}$, et tel que l'application d'inversion dans $\mathbb{K}^\times$ soit continue. Le lecteur peut supposer dans un premier temps que $\mathbb{K}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre sur un corps $\mathbf{k}$, par exemple, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ et considérer $\mathbb{K}$ comme étant $\mathbb{K} = \mathbf{k} \oplus \varepsilon\mathbf{k}$, avec, par exemple $\varepsilon^2 = -1$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou $\varepsilon^2 = 1$ (nombres para-complexes) ou $\varepsilon^2 = 0$ (nombres duaux).

Dans la première partie, nous rappellerons les définitions de deux notions de différentiabilité : la différentiabilité au sens *cubique* et la différentiabilité au sens *simplicial*. La définition de la différentiabilité sera liée à la construction de deux familles de foncteurs : les *foncteurs tangents itérés* dans le cas cubique et les *foncteurs de jets* dans le cas simplicial. Ces foncteurs sont les premiers exemples de foncteurs de Weil. Pour des informations plus précises, nous renvoyons à l'introduction de la première partie.

Dans l'annexe C, nous montrons, en suivant le livre [Bertram 2011], que la notion de différentiabilité sur $\mathbb{K}$, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, coïncide avec la notion de différentiabilité réelle usuelle, ce qui montre que notre travail est bien une généralisation des résultats obtenus dans le cadre classique.

Shurygin a étudié, dans les articles [Shurygin 1993], [Shurygin 1999], [Shurygin 2002] et [Shurygin 2010], les foncteurs de Weil dans le cadre classique des variétés réelles de dimension finie. Cependant, son approche présente des analogies avec la nôtre : il considère une notion de lissité sur toute $\mathbb{R}$-algèbre, notion définie par Scheffers au XIXe siècle dans l'article [Scheffers 1893]. Les notions de variétés sur une algèbre ont été étudiées en détail par Shirokov dans l'article [Shirokov 1981]. Nous donnons en annexe C une comparaison de différents cadres différentiels.

1.2.2 Construction des fibrés de Weil généralisés

Dans notre cadre, une définition analogue à celle des algèbres de Weil classiques, comme définies par exemple dans le livre [Kolář, Michor, Slovák 1993], est la suivante.

Définition 1.2.1. *Une* $\mathbb{K}$-algèbre de Weil *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre* $\mathbb{A}$*, commutative, associative, unitaire, de la forme* $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$*, où* $\mathring{\mathbb{A}}$ *est un idéal nilpotent libre et de dimension finie sur* $\mathbb{K}$*.*

Une telle algèbre est encore un anneau topologique, commutatif, unitaire de groupe unité $\mathbb{A}^\times$ dense dans $\mathbb{A}$, tel que l'inversion est continue. On peut donc choisir $\mathbb{A}$ comme nouvel anneau de base, ce qui permet de considérer les notions d'applications lisses sur $\mathbb{A}$ et de variétés lisses sur $\mathbb{A}$.

Le résultat principal de la deuxième partie de ce travail peut se résumer de la manière suivante (voir les théorèmes 7.1.2 et 7.1.4 pour plus de détails).

Théorème 1.2.2. *Soit* $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil. Alors, à toute variété* M *lisse sur* $\mathbb{K}$*, il est possible d'associer une variété lisse* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *telle que :*

1. *la construction est fonctorielle et compatible avec les produits cartésiens,*
2. $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *est une variété lisse sur* $\mathbb{A}$ *(et donc sur* $\mathbb{K}$*), et, pour toute application* f *lisse sur* $\mathbb{K}$ *entre deux variétés* M *et* N*, l'application correspondante* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f$*, de* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *dans* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$*, est lisse sur* $\mathbb{A}$*,*
3. *si* M *est une sous-variété ouverte* U *d'un* $\mathbb{K}$*-module topologique* V*, alors* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U$ *peut être identifié à l'image réciproque de* U *par l'application canonique* $V_{\mathbb{A}} \to V$*, où* $V_{\mathbb{A}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}$ *est l'extension scalaire usuelle de* V*. Si, dans ce contexte, l'application* f *de* U *dans* W *est* polynomiale*, alors* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f$ *coïncide avec l'extension scalaire algébrique* $f_{\mathbb{A}}$*, de* $V_{\mathbb{A}}$ *dans* $W_{\mathbb{A}}$*, de* f*.*

Ces propriétés caractérisent le foncteur de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$*.*

Les *foncteurs de Weil* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ sont des généralisations du foncteur tangent usuel T, qui est obtenu pour le cas particulier des nombres duaux sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{A} = \mathrm{T}\mathbb{K} := \mathbb{K} \oplus \varepsilon\mathbb{K}$, avec $\varepsilon^2 = 0$. Plus généralement, les foncteurs tangents itérés T^k et les foncteurs de jets J^k sont des foncteurs de Weil. Ce sont les exemples fondateurs dans le sens où ils vont permettre la construction des foncteurs de Weil généraux. Le théorème met en évidence que la structure de variété de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est encodée dans la structure d'anneau de $\mathbb{A}$ de manière beaucoup plus forte que dans la théorie classique, développée par exemple dans le livre [Kolář, Michor, Slovák 1993] : la variété $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ joue de tout point de vue le rôle d'une *extension scalaire* de M et le foncteur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ peut par conséquent être considéré comme un *foncteur d'extension scalaire*, ce qui pourrait nous permettre d'écrire $M_{\mathbb{A}} := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Cette interprétation est courante pour les mathématiciens habitués à la géométrie algébrique, mais l'est beaucoup moins dans le cadre de la géométrie différentielle, ce qui rend nos résultats certainement plus proches des idées originelles d'André Weil que la plupart de la littérature existante. Notez que dans le cadre classique, c'est-à-dire le cadre des variétés réelles de dimension finie, Shirokov a découvert l'existence sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ d'une structure de variété lisse sur $\mathbb{A}$, au sens donné dans l'article [Shirokov 1981].

Notre travail généralise les résultats qui ont été obtenus dans les articles [Bertram 2008] et [Bertram 2010], où deux familles de foncteurs de Weil ont été particulièrement étudiées : les *foncteurs tangents itérés* ou *foncteurs tangents d'ordre supérieur* T^k, correspondant aux *anneaux tangents itérés*, $\mathrm{T}^{k+1}\mathbb{K} := \mathrm{T}(\mathrm{T}^k\mathbb{K})$, et les *foncteurs de jets* J^k, correspondant aux *anneaux de jets (holonomes)* $\mathrm{J}^k\mathbb{K} := \mathbb{K}[X]/(X^{k+1})$. Comme ces deux exemples jouent un rôle fondamental dans la preuve de notre résultat général, nous rappelons et étendons légèrement les résultats pour ces deux familles de foncteurs. En particulier, nous décrivons en détail l'*action canonique de* $\mathbb{K}^\times$, qui apparaît déjà dans le cadre du calcul différentiel, et qui induit une graduation naturelle de ces familles d'algèbres de Weil.

Le cœur de la preuve du théorème 1.2.2 est l'étude de la relation entre deux concepts fondateurs, à savoir celui de *jet* et celui de *développement de Taylor*. Il est bien connu que, dans le cadre classique, ces deux concepts sont essentiellement équivalents (voir, par exemple, [Reinhart 1983]), mais le concept de jet est de nature géométrique, intrinsèque, donc a un sens indépendamment du choix d'une carte, alors que le concept de développement de Taylor peut être écrit uniquement dans une carte et ne possède donc pas de nature invariante. Ceci se traduit par une différence de comportement relativement à la composition des applications : les jets obéissent à une règle de composition totalement fonctorielle

$$\mathrm{J}^k_x(g \circ f) = \mathrm{J}^k_{f(x)} g \circ \mathrm{J}^k_x f\,, \tag{1.2.1}$$

alors que les polynômes de Taylor (que nous considérons ici sans terme constant) suivent la règle de composition tronquée des polynômes

$$\mathrm{Tay}^k_x(g \circ f) = \Big(\mathrm{Tay}^k_{f(x)} g \circ \mathrm{Tay}^k_x f\Big) \quad \mathrm{mod}\ (\deg > k)\,. \tag{1.2.2}$$

Cette absence de fonctorialité est compensée par le fait que, comme tout polynôme, les polynômes de Taylor admettent des extensions scalaires algébriques, de telle sorte que le polynôme de Taylor $P = \mathrm{Tay}^k_x f : V \to W$ d'ordre k d'une application $f : V \supset U \to W$, lisse sur $\mathbb{K}$, au point x de U, s'étend naturellement en un polynôme $P_{\mathbb{A}} : V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A} \to W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}$. Notre construction générale des foncteurs de Weil combine ces deux procédures d'extension. La première étape, basée sur le calcul différentiel défini dans la première partie, consiste en la construction des foncteurs de jets J^k, qui associent à chaque application lisse f son jet (simplicial) d'ordre k (ou k-jet). À l'aide de cet objet invariant, nous *définissons* lors de la deuxième étape le polynôme de Taylor $\mathrm{Tay}^k_x f$ au point x, en utilisant une construction qui dépend d'une carte (voir la section 4.2), et nous prouvons ensuite la règle de composition (1.2.2) (voir le théorème 5.3.1). Notez que, dans le cas classique, nos polynômes de Taylor $\mathrm{Tay}^k_x f$ coïncident bien entendu avec les polynômes de Taylor usuels, mais nous ne les avons pas définis de la manière habituelle en termes de différentielles d'ordre supérieur, puisqu'il aurait alors fallu diviser par $k!$, ce qui est impossible en caractéristique positive. Dans une troisième étape, nous considérons l'extension scalaire algébrique de $\mathbb{K}$ à $\mathring{\mathbb{A}}$ des polynômes de Taylor : si le degré k est supérieur à l'ordre de nilpotence de $\mathring{\mathbb{A}}$, alors

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_x f := \Big(\mathrm{Tay}^k_x f\Big)_{\mathring{\mathbb{A}}} : V_{\mathring{\mathbb{A}}} := V \otimes \mathring{\mathbb{A}} \to W_{\mathring{\mathbb{A}}} \tag{1.2.3}$$

satisfait à une règle de transformation complètement fonctorielle, de sorte que le foncteur de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ peut être défini par

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f : U \times V_{\mathring{\mathbb{A}}} \to W \times W_{\mathring{\mathbb{A}}}, \quad (x, y) \mapsto \Big(f(x), \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_x f(y)\Big)\,.$$

Cette approche nécessite de développer certains outils généraux sur la continuité et la lissité des polynômes, que nous reléguons dans l'annexe *A*.

1.2.3 Fibrés de Weil

Nous développons la relation entre les points de vue algébrique et géométrique et nous étudions des notions de géométrie différentielle, en particulier des structures fibrées.

Les fibrés $\mathbb{A}$-tangents

Nous montrons au théorème 8.1.1que, pour toute $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$ et pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ possède une structure de *fibré polynomial* sans terme constant sur M. Cela signifie que les changements de cartes de fibré (qui est toujours donné avec son atlas) sont polynomiaux fibre à fibre, et ce, sans terme constant. Il s'agit d'une généralisation de la structure de fibré vectoriel du fibré tangent $\mathrm{T}M$, pour lequel les changements de cartes sont linéaires fibre à fibre. Si l'idéal $\mathring{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}$ est nilpotent d'ordre $k+1$, alors le fibré polynomial $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est de degré k, c'est-à-dire que les changements de cartes sont de degré au plus k. Comme dans le cas tangent, il existe une section naturelle dite *section nulle*, notée $\sigma_M^{\mathbb{A}}$, de M dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ possède une structure lisse sur $\mathbb{A}$, où la structure lisse sur $\mathbb{A}$ de M est obtenue par *restriction scalaire* de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{K}$. $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ est en fait l'unique foncteur

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}an_{\mathbb{K}} \to \mathcal{S}Bun_{\mathbb{A}}, \quad M \mapsto \left(\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M\right),$$

de la catégorie $\mathcal{M}an_{\mathbb{K}}$ des variétés lisses sur $\mathbb{K}$ dans la catégorie $\mathcal{S}Bun_{\mathbb{A}}$ des fibrés lisses sur $\mathbb{A}$ munis d'une section, qui coïncide sur les ouverts U de $\mathbb{K}$-modules topologiques V avec l'application $U \mapsto U \times V \otimes \mathring{\mathbb{A}}$.

Toute application F lisse sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ induit un morphisme de fibrés entre $\pi_M^{\mathbb{A}}$ et $\pi_N^{\mathbb{A}}$, c'est-à-dire qu'il existe une application $f = \pi_M^{\mathbb{A}} \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} : M \to N$, lisse sur $\mathbb{K}$, telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_M^{\mathbb{A}}"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \arrow[d, "\pi_N^{\mathbb{A}}"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd} . \tag{1.2.4}$$

De plus, F est un $\mathbb{A}$-difféomorphisme si et seulement si f est un $\mathbb{K}$-difféomorphisme.

Dans le cas où $M = N$, tout $\mathbb{A}$-difféomorphisme $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *au-dessus de l'identité de* M (c'est-à-dire qui induit, au sens de (1.2.4), l'application $f = \mathrm{id}_M : M \to M$), est appelé *automorphisme infinitésimal.* L'ensemble $\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(M)$ des automorphismes infinitésimaux de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ possède une structure naturelle de groupe pour la composition.

Toute application $f : M \to N$ lisse sur $\mathbb{K}$ se relève de manière unique en une application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ lisse sur $\mathbb{A}$, de telle sorte que $(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f, f)$ soit un morphisme de fibré $\mathbb{A}$-lisses avec sections, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \\ M \arrow[u, "\sigma_M^{\mathbb{A}}"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[u, "\sigma_N^{\mathbb{A}}"'] \end{tikzcd} \tag{1.2.5}$$

Le résultat principal du chapitre consacré aux fibrés $\mathbb{A}$-tangents est le suivant :

Théorème 1.2.3. *Soient M une variété lisse sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors :*

1. *l'ensemble $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ des sections du fibré $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est en bijection avec le groupe $\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$, ce qui le munit d'une structure de groupe (non commutatif en général),*

2. *la suite suivante de groupes est exacte et scindée :*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M) \arrow[r, hook, "i"] & \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \arrow[r, two heads, "p"] & \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M) \arrow[l, bend left, "s"] \end{tikzcd} ,$$

où la projection p est l'application $F \mapsto f := \pi_M^{\mathbb{A}} \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}}$, décrite en (1.2.4), et où la section est l'application $f \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$ décrite en (1.2.5). Par conséquent, le groupe des $\mathbb{A}$-difféomorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est produit semi-direct du groupe des $\mathbb{K}$-difféomorphismes de M et du groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ des sections du fibré $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$.

Le point de vue algébrique permet de traduire en termes de géométrie différentielle certains aspects de résultats bien connus en géométrie algébrique. Tout d'abord, les algèbres et fibrés de Weil possèdent une structure analogue à la K-théorie relativement aux opérations

1. produit tensoriel : $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{B} \cong \mathbb{K} \oplus \left(\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \otimes \mathring{\mathbb{B}}\right)$,
2. somme de Whitney : $\mathbb{A} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{B} := (\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{B}) \,/\, \left(\mathring{\mathbb{A}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathring{\mathbb{B}}\right) \cong \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$.

Alors que la somme de Whitney correspond exactement au produit fibré sur M

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$$

des fibrés correspondants, nous devons être plus prudents avec l'interprétation du produit tensoriel en termes de fibrés (théorème 8.4.1) : les fibrés de Weil ne sont en général *pas* des fibrés vectoriels, et donc il n'existe pas de définition claire de produit tensoriel fibre à fibre. En fait, le produit tensoriel correspond plutôt à la *composition des foncteurs de Weil* :

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}M \cong \mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M).$$

En suivant le modèle de la théorie de Galois, nous étudions le *groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ *d'automorphismes* de $\mathbb{A}$ pour comprendre la structure du fibré de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ sur M. En effet, par fonctorialité, tout automorphisme Ψ de $\mathbb{A}$ induit canoniquement un difféomorphisme Ψ_M, de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, qui commute avec toutes les *applications* $\mathbb{A}$*-tangentes* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f$ où f appartient au groupe $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M)$ des difféomorphismes sur $\mathbb{K}$ de M. Par conséquent, il y a deux actions de groupe qui commutent entre elles : celle de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ et celle de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M)$. Comme souvent en théorie des groupes, nous obtenons une meilleure compréhension d'une action de groupe lorsque nous connaissons une autre action de groupe qui commute avec celle-ci. Un cas particulièrement important est celui des *algèbres de Weil graduées*, étudié, notamment dans [Kureš, Mikulski 2004] où le terme *homogeneous Weil algebra* est utilisé. Dans ce cas, il existe des sous-groupes d'automorphismes à un paramètre et l'algèbre de Weil possède comme nouvelle structure un produit qui se comporte de manière analogue à une composition, ce qui la munit d'une structure de quasi-anneau (near-ring), en général non commutatif, similaire au quasi-anneau des séries formelles pour la composition (voir le théorème 6.5.6).

Les fibrés Φ-tangents

La structure fibrée de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ n'est qu'un exemple de structure fibrée obtenue avec les foncteurs de Weil : elle correspond en fait à l'*extension polynomiale* d'algèbres de Weil $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, où nous disons qu'une suite de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{B}$ est un extension polynomiale si la suite d'idéaux nilpotents $\overset{\circ}{\mathbb{V}} \hookrightarrow \overset{\circ}{\mathbb{A}} \twoheadrightarrow \overset{\circ}{\mathbb{B}}$ est une suite exacte courte d'algèbres topologiques. De manière générale, toute extension polynomiale $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ induit un foncteur

$$\mathrm{T}^{\Phi} : \mathcal{M}an_{\mathbb{K}} \to \mathcal{B}un_{\mathbb{A}}, \quad M \mapsto \left(\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M\right),$$

de la catégorie des variétés lisses sur $\mathbb{K}$ dans la catégorie des fibrés lisses sur $\mathbb{A}$. Si $\overset{\circ}{\mathbb{V}}$ est nilpotent d'ordre $j+1$, alors pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ possède une structure de fibré polynomial de degré j sur $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$, mais ce fibré ne possède pas de section naturelle. Cette différence avec le cas $\mathbb{A}$-tangent est très importante. Une propriété similaire à la propriété (1.2.4) existe, c'est-à-dire que toute application F lisse sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ induit un morphisme de fibrés entre Φ_M et Φ_N tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_M"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \arrow[d, "\Phi_N"] \\
\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \arrow[r, "F_\Phi"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N
\end{tikzcd}$$

En revanche, il n'existe pas de propriété analogue à la propriété (1.2.5) en général, et il n'est pas possible de relever des applications lisses sur $\mathbb{B}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ dans $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}N$, en des applications lisses sur $\mathbb{A}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$, précisément parce qu'il n'existe pas de section naturelle du fibré Φ_N.

L'exemple le plus important est celui des fibrés de jets : pour tous entiers $j \leq k$, la projection $\pi^k_j : \mathrm{J}^k\mathbb{K} \to \mathrm{J}^j\mathbb{K}$, qui correspond à la troncature des polynômes au degré j, est une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Elle induit un fibré $\mathrm{J}^kM \to \mathrm{J}^jM$ pour toute variété M. Une différence fondamentale avec les fibrés tangents itérés $\mathrm{T}^kM \to \mathrm{T}^jM$, induits par les extensions polynomiales de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil $\mathrm{T}^k\mathbb{K} \to \mathrm{T}^j\mathbb{K}$, est qu'il n'existe pas de sections en tant qu'algèbres de $\mathrm{J}^j\mathbb{K}$ dans $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$. En particulier, pour tout entier k, le fibré $\mathrm{J}^{k+1}M \to \mathrm{J}^kM$ n'est pas un fibré vectoriel, mais un fibré affine.

Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{B}$ une extension polynomiale d'algèbres de Weil. Comme le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to M$ possède une section nulle, nous pouvons considérer le sous-fibré de $\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ dont l'image est nulle. Ce sous-fibré est appelé fibré Φ-*vertical* et est isomorphe au fibré de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M$.

1.2.4 Connexions

Pour une introduction générale aux connexions, voir l'introduction de la partie IV.

Nous définissons une notion de connexion, appelée *structure* $\mathbb{K}$-*linéaire* sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, qui est un isomorphisme entre le fibré $\mathbb{A}$-tangent $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ d'une variété M et le fibré vectoriel $\mathrm{T}M \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}$ sur M dont la fibre en un point x de M est $\mathrm{T}_xM \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}$, qui peut être considéré comme le fibré vectorialisé de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Nous étudions les *opérateurs de courbure* de ces connexions, qui sont définies comme étant des obstructions à l'invariance sous l'action naturelle du groupe des automorphismes de $\mathbb{A}$ sur chaque membre de cet isomorphisme.

Soit $\mathbb{V} \to \mathbb{A} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Une Φ-*connexion* sur M est définie comme étant une décomposition

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}}M,$$

qui est polynomiale au-dessus de $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$.

La donnée d'une section du fibré Φ_M lorsque $\mathring{\mathbb{V}}$ est annulateur de $\mathbb{A}$ (on parle alors d'*extension vectorielle centrale*) permet de construire une Φ-connexion sur M. Nous montrons que, pour toute algèbre de Weil, nous pouvons construire une suite de telles extensions vectorielles. La donnée des sections correspondantes nous permet de construire une structure $\mathbb{K}$-linéaire sur le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$.

Nous définissons également des *connexions de type Ehresmann* sur un fibré. Soient $\pi : E \to M$ un fibré lisse et $\mathbb{A}$ une algèbre de Weil. Alors nous pouvons lui appliquer le foncteur de Weil $T^{\mathbb{A}}$. Nous montrons que $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré. En particulier, si $\pi : E \to M$ est un fibré principal (resp. associé), alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi$ est à nouveau un fibré principal (resp. associé). De plus, il existe d'autres structures fibrées intéressantes : $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to E$ est un fibré polynomial et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ possède également une structure fibrée sur M, que nous étudions en détail et dont nous donnons un groupe structural.

Comme $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ possède une section nulle $\sigma_M^{\mathbb{A}}$, nous pouvons définir le *fibré* $\mathbb{A}$-*vertical* $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ comme étant le sous-fibré de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ dont l'image est $\sigma_M^{\mathbb{A}}(M)$. Une $\mathbb{A}$-*connexion* sur E ou *connexion de type Ehresmann* sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ est la donnée d'une décomposition

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E,$$

qui respecte les structures fibrées, c'est-à-dire qui préserve la lissité sur $\mathbb{A}$ des fibres sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, qui est polynomial sur E, et dont la restriction au fibré vertical $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ est l'identité. L'ensemble des $\mathbb{A}$-connexions possède une structure d'espace homogène principal modelé sur le groupe qui fait intervenir les structures fibrées de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ et $E \to M$ que nous venons de mentionner.

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux algèbres de Weil. Soit $\pi : E \to M$ un fibré. Soient $C^{\mathbb{A}}$ une $\mathbb{A}$-connexion et $C^{\mathbb{B}}$ une $\mathbb{B}$-connexion sur E. Alors nous pouvons itérer ces connexions et construire de manière naturelle deux $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})$-connexions. Si $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ et $C^{\mathbb{A}} = C^{\mathbb{B}}$, alors ces deux $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-connexions sont conjuguées. Leur différence est alors définie comme étant la *courbure* de la $\mathbb{A}$-connexion.

Première partie

Calculs différentiels cubique et simplicial

Introduction

Cette première partie présente le cadre différentiel dans lequel nous allons nous placer tout au long de cette thèse.

Le calcul différentiel est un formalisme qui permet, d'une part, de passer à la limite certains quotients de différences et, d'autre part, de prouver certaines règles, dont la règle de composition. Cette dernière est particulièrement importante car elle permet de définir la notion de variété différentielle, et donc celle de groupe de Lie, qui constituent les objets fondamentaux de la géométrie différentielle. L'idée fondatrice du calcul différentiel est l'étude du passage à la limite, pour une application f entre deux espaces vectoriels, de l'application

$$(x, v, t) \mapsto \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \tag{1.2.6}$$

appelée quotient de différence, qui est définie uniquement pour des scalaires t inversibles.

Nous présentons ici deux calculs différentiels très généraux, qui restent très proches de ce point de vue et qui permettent de considérer à la fois des corps topologiques de base $\mathbb{K}$ quasi arbitraires (et même des anneaux), et la théorie infinie-dimensionnelle, au sens où nous pouvons considérer des applications $f : U \subset V \to W$ entre $\mathbb{K}$-modules de dimension, si elle existe, finie ou infinie.

Le calcul différentiel généralisé permet, à l'aide de l'algèbre linéaire et de la topologie uniquement, de déterminer les résultats fondamentaux, c'est-à-dire les résultats indépendants des propriétés particulières du corps de base considéré. Afin de bien comprendre à quel point les notions habituellement étudiées dépendent du corps de base, il suffit de considérer le corps des nombres réels et celui des nombres complexes. La notion de classe $\mathcal{C}^1$ au sens complexe est extrêmement rigide comparée à la notion de classes $\mathcal{C}^1$ au sens réel. En effet, les premières sont lisses au sens complexe, analytiques, vérifient le principe du maximum, alors que les applications de classe $\mathcal{C}^1$ au sens réel sont beaucoup plus nombreuses et ne sont pas toutes de classe $\mathcal{C}^2$.

L'idée essentielle du calcul différentiel présenté ici est que, si le passage à la limite d'un quotient de différences est peu utile en soi, en revanche, il devient très intéressant s'il est considéré comme l'extension d'un quotient de différences aux valeurs *singulières*, déterminées par la condition $t = 0$. Nous dirons ainsi qu'une application continue $f : U \subset V \to W$ est *de classe* $\mathcal{C}^1$ si et seulement s'il existe une application continue

$$f^1 : U \times V \times \mathbb{K} \supseteq U^1 := \{(x, v, t) \mid x + tv \in U\} \to W$$

telle que la relation

$$f(x + tv) - f(x) = t \cdot f^1(x, v, t) \tag{1.2.7}$$

soit vérifiée pour tout $(x, v, t) \in U^1$. La *différentielle de f au point x de U* sera alors définie par $df(x)v := f^1(x, v, 0)$. Cette définition possède au moins deux avantages : d'une part il s'agit d'une définition raisonnable dans un cadre très large, où les définitions usuelles sont dépourvues de sens et, d'autre part, la structure du corps de base n'y joue aucun rôle. Elle a un sens dès que la notion de continuité est définie, et donc pour tout module topologique sur un anneau topologique dont l'ensemble des éléments inversibles est dense, cette dernière condition assurant l'unicité du prolongement f^1 et de la différentielle df.

Nous pouvons généraliser ces définitions à tout ordre de différentiabilité de deux manières différentes et aboutir à deux notions distinctes d'applications de classe supérieure. Une première possibilité consiste à définir les classes d'ordre supérieur par récurrence : une application de classe $\mathcal{C}^1$ est dite *de classe* $\mathcal{C}^2$ si l'application f^1 est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$, et ainsi de suite. Il s'agit du calcul différentiel que nous appelons *cubique*, suivant la terminologie de [Bertram 2010], qui a été défini par Bertram, Glöckner et Neeb dans l'article [Bertram, Glöckner, Neeb 2004]. Ce calcul possède l'avantage d'être défini par récurrence mais présente le défaut de faire intervenir un nombre de variables qui augmente de manière exponentielle avec l'ordre de différenciation, ce qui le rend très difficile à manipuler explicitement. Il sera lié au *foncteur tangent* T, qui généralise le foncteur tangent usuel, ainsi qu'aux *foncteurs tangents itérés* $\mathrm{T}^k := \mathrm{T} \circ \mathrm{T}^{k-1}$. Une seconde possibilité pour définir une notion d'applications de classe supérieure consiste à considérer des généralisations $f^{\rangle k \langle}$ du quotient de différence (1.2.6) à l'ordre k et à déterminer s'il existe des prolongements continus de ces applications, qui vérifieront des relations de développement limité analogues à la relation (1.2.7). Il s'agit du calcul différentiel appelé *simplicial* et défini par Bertram dans [Bertram 2010]. Le nombre de variables est dans ce cas linéaire en l'ordre de différenciation et est, par conséquent, plus aisé à manipuler. De plus, il est mieux adapté au cas des anneaux de caractéristique positive. Il sera lié aux *foncteurs de jets* J^k. Nous conjecturons que ces deux calculs différentiels sont équivalents, mais il est simplement démontré pour l'instant que le calcul différentiel cubique implique le calcul simplicial, c'est-à-dire que toute application de classe $\mathcal{C}^k$ au sens cubique est également de classe $\mathcal{C}^k$ au sens simplicial. Chaque calcul possède ses avantages et nous serons par conséquent amenés à travailler avec les deux.

Dans ces deux cadres apparaissent des développements limités, appelés *développements de Taylor*, qui sont fondamentaux pour la définition des foncteurs de Weil généralisés, qui fera l'objet de la partie suivante. Le cœur de la construction des foncteurs de Weil est l'étude de la relation entre deux concepts fondateurs, à savoir celui de *jet* et celui de *développement de Taylor*. Ces deux concepts sont équivalents dans le cadre classique (voir, par exemple, [Reinhart 1983]), mais les deux concepts sont de nature différentes. Du point de vue de l'analyse, l'interaction entre les jets et les polynômes de Taylor se traduit par une interaction entre les *différences divisées (généralisées)* et (plusieurs) *conditions sur le reste* dans le développement limité d'une application f autour d'un point x. Les jets se comportent de manière fonctorielle, indépendante des cartes d'une variété, et sont donc très bien adaptés au cas de la dimension quelconque. Cette notion peut ainsi nous permettre de définir le calcul différentiel généralisé, qui induit des développements limités *radiaux* et *radiaux multi-variables*, qui représentent le second aspect, et qui sont le point de départ de notre définition des polynômes de Taylor, dont nous montrerons qu'il s'agit bien d'applications polynomiales. Il est important de noter qu'une notion de polynômes de Taylor existe, même lorsque le corps ou l'anneau de base est de caractéristique positive. Ceci explique que les polynômes de Taylor ne soient pas définis de la manière usuelle, en utilisant des quotients des différentielles d'ordre supérieur par des entiers.

Cette partie est organisée en quatre chapitres, comme suit :

2. *Quotients de différences* qui est constitué de deux sections. Dans la première, sont définis les domaines étendus, qui sont les domaines de définition des généralisations de l'application (1.2.6), ainsi que l'action du groupe unité $\mathbb{K}^\times$ sur ces domaines. Dans la seconde section est présenté le calcul de différences, qui est un calcul algébrique, non singulier, au sens où les scalaires considérés sont inversibles.

3. *Calculs différentiels*, où sont définis les calculs différentiels cubique et simplicial, qui sont le prolongement du calcul de différences aux valeurs singulières, c'est-à-dire pour des scalaires non inversibles.

4. *Développements et Polynômes de Taylor*, où nous présentons deux versions de développements limités et où nous définissons les polynômes de Taylor, dont il faut montrer la polynomialité.

5. *Jets simpliciaux*, où nous montrons que les jets simpliciaux d'une application peuvent être interprétés comme des extensions scalaires et sont en ce sens l'exemple fondateur d'extension à une algèbre de Weil. Nous y montrons également le lien entre les polynômes de Taylor et les jets simpliciaux, lien qui constituera le cœur de la construction des foncteurs de Weil.

Chapitre 2

Quotients de différences

Nous rappelons ici les définitions élémentaires concernant les calculs différentiels cubique et simplicial développés respectivement dans l'article [Bertram, Glöckner, Neeb 2004] et dans l'article [Bertram 2010].

La première étape vers la définition des notions de classes $\mathcal{C}^k$ est de considérer les généralisations $f^{]k[}$ et $f^{\rangle k\langle}$, appelées respectivement quotients de différences cubiques et simpliciaux, du quotient de différence $\dfrac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ d'une application f, à l'ordre k. Pour cela, nous allons commencer par définir leurs domaines de définition $U^{]k[}$ et $U^{\rangle k\langle}$ avant de les définir elles-mêmes. Les notions de classe d'ordre supérieur seront définies à partir de l'existence de prolongements continus $f^{[k]}$ et $f^{\langle k\rangle}$ des applications $f^{]k[}$ et $f^{\rangle k\langle}$ aux éléments non singuliers. Nous définirons ici les domaines de définition de ces applications.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un anneau commutatif unitaire et V un $\mathbb{K}$-module (aucune topologie ne sera utilisée ici).

2.1 Domaines étendus et action de $\mathbb{K}^\times$

Soit U un ensemble non vide, appelé *domaine*, tel que $U \subset V$. Nous définissons deux sortes de *domaines étendus* : les *domaines cubiques*, notés $U^{[k]}$ et les *domaines simpliciaux*, notés $U^{\langle k\rangle}$ pour tout entier k. Ceux-ci seront les domaines de définition des généralisations à l'ordre k de l'application tangente de toute application f définie sur un domaine U. L'organisation des domaines cubiques nous donne déjà un aperçu de l'organisation des fibrés tangents itérés que nous étudierons plus tard. De manière analogue, l'organisation des domaines simpliciaux nous renseigne sur l'organisation des fibrés de jets.

Le groupe unité $\mathbb{K}^\times$ de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathbb{K}$, agit de manière naturelle sur tous ces domaines. Cette action se généralisera à toute algèbre de Weil $\mathbb{N}$-graduée (voir la définition 5.2.1).

2.1.1 Ordre 0 et ordre 1

Commençons par définir les conventions pour l'ordre 0, évidement commun aux deux calculs. Par convention, nous posons $U^{[0]} := U =: U^{\langle 0\rangle}$. L'*action d'ordre zéro* du groupe $\mathbb{K}^\times$ sur U est l'action triviale

$$\rho_{[0]} : \mathbb{K}^\times \times U \to U, \quad (r,x) \mapsto x.$$

À l'ordre 1, les deux calculs différentiels sont encore identiques :

Définition 2.1.1 (Premier domaine étendu)**.** *Le* premier domaine étendu *de U est défini par*

$$U^{[1]} := \{(x,v,t) \in V \times V \times \mathbb{K} \mid x \in U,\, x + tv \in U\} \subset V^{[1]}.$$

L'ensemble U est appelé la base *de $U^{[1]}$, et l'application*

$$\pi^{[1]} : U^{[1]} \to U,\ (x,v,t) \mapsto x$$

est appelée la projection canonique *du premier ordre et sa section*

$$\sigma^{[1]} : U \to U^{[1]},\ x \mapsto (x,0,0)$$

*est appelée l'*injection canonique *du premier ordre. L'ensemble*

$$U^{]1[} := \left\{(x,v,t) \in U^{[1]} \mid t \in \mathbb{K}^{\times}\right\} = \{(x,v,t) \in U \times V \times \mathbb{K}^{\times} \mid x + tv \in U\}$$

est appelé ensemble des éléments non singuliers *du domaine étendu $U^{[1]}$. C'est précisément le domaine de définition du quotient de différence $\dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t}$ d'une application $f : U \to V$.*

En prenant $t = 0$, nous définissons le domaine le plus singulier *ou* domaine tangent

$$\mathrm{J}U := \mathrm{T}U := \{(x,v,0) \in U^{[1]}\} \cong U \times V.$$

Définition 2.1.2. *L'*action canonique du groupe $\mathbb{K}^{\times}$ sur le premier domaine étendu *est donnée par*

$$\rho_{[1]} : \mathbb{K}^{\times} \times U^{[1]} \to U^{[1]}, \quad (r,(x,v,t)) \mapsto \rho_{[1]}(r).(x,v,t) := (x, rv, r^{-1}t).$$

Cette application est bien définie : $x + tv$ appartient à U si et seulement si $x + r^{-1}trv$ appartient également à U. Notez que la commutativité de $\mathbb{K}^{\times}$ est essentielle ici.

2.1.2 Ordre supérieur, version cubique

La différence entre les domaines cubiques et simpliciaux intervient à partir de l'ordre 2. La première idée, ou en tout cas l'idée la plus naturelle, lorsque nous voulons définir la classe $\mathcal{C}^2$ est de se ramener à la définition de la classe $\mathcal{C}^1$, ce qui évite d'avoir à introduire de nouvelles notions. Ainsi, nous disons qu'une application est de classe $\mathcal{C}^2$ si la différentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ et ainsi de suite. Cette utilisation de la notion de classe $\mathcal{C}^1$ par récurrence mène à la définition de la première famille de domaines étendus : les domaines cubiques.

Définition 2.1.3 (Domaines cubiques)**.** *Par récurrence, nous définissons, pour tout entier naturel k, les* domaines cubiques d'ordre $k+1$

$$U^{[k+1]} := \left(U^{[k]}\right)^{[1]},$$

les domaines cubiques non singuliers d'ordre $k+1$

$$U^{]k+1[} := \left(U^{]k[}\right)^{]1[},$$

et les domaines cubiques les plus singuliers *ou* domaines tangents d'ordre $k+1$

$$\mathrm{T}^{k+1}U := \mathrm{T}\left(\mathrm{T}^{k}U\right).$$

Les domaines cubiques s'organisent de la manière suivante

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] & U^{]1[} \arrow[r] \arrow[d] & U^{]2[} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & U^{]k[} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
U \arrow[r] & U^{[1]} \arrow[r] & U^{[2]} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & U^{[k]} \arrow[r] & \dots \\
U \arrow[r] & \mathrm{T}U \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{T}^2U \arrow[r] \arrow[u] & \dots \arrow[r] & \mathrm{T}^kU \arrow[r] \arrow[u] & \dots
\end{tikzcd}$$

où toutes les flèches horizontales sont des injections et les flèches verticales des inclusions.

Il existe, pour tout entier j inférieur à k, des applications

$$\pi^{[k]}_{[j]} : U^{[k]} \to U^{[j]}$$

appelées *projections canoniques cubiques*. Leurs sections

$$\sigma^{[k]}_{[j]} : U^{[j]} \to U^{[k]}$$

sont appelées les *injections canoniques cubiques*. Toutes ces applications préservent les domaines non singuliers et les domaines tangents, et les injections et projections canoniques induisent des applications $\pi^{]k[}_{]j[}$ et $\sigma^{]k[}_{]j[}$ sur les domaines cubiques non singuliers et les applications π^k_j et σ^k_j sur les domaines tangents.

Notez que

$$U^{[2]} \subset \left(V^2 \times \mathbb{K}\right) \times \left(V^2 \times \mathbb{K}\right) \times \mathbb{K} \cong V^4 \times \mathbb{K}^3,$$

et, de manière analogue, nous considérons $U^{[k]}$ en tant que sous-ensemble de $V^{2^k} \times \mathbb{K}^{2^k-1}$ et nous identifions systématiquement T^kU avec $U \times V^{2^k-1}$. Les éléments de V sont appelés *variables d'espace*, et les éléments de $\mathbb{K}$ *variables de temps*. Nous séparons les variables d'espace et de temps, et nous écrivons les éléments de $U^{[k]}$ sous la forme

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}) = \left((v_I)_{I\subset\{1,\dots,k\}}, (t_I)_{\emptyset\neq I\subset\{1,\dots,k\}}\right).$$

Avec cette notation, $v_\emptyset$ appartient à U, et

$$\mathrm{T}^kU = \left\{(\boldsymbol{v}, \mathbf{0}) \in U^{[k]}\right\} \simeq U \times V^{2^k-1} \subset V^{2^k},$$

où $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Pour tout domaine cubique d'ordre k, le nombre de variables d'espace est 2^k. Chaque variable d'espace peut ainsi être représentée par le sommet d'un hypercube de dimension k, ce qui est à l'origine du terme *cubique* utilisé ici.

Une description explicite des domaines cubiques d'ordre élevé par des conditions en termes d'ensembles est très compliquée, car le nombre de variables augmente de manière exponentielle en fonction de l'ordre de différenciation. Afin de mieux comprendre la structure de ces domaines, il est utile de remarquer une propriété d'homogénéité relative aux actions suivantes :

Définition 2.1.4. *L'*action canonique cubique du groupe $\mathbb{K}^\times$ sur $U^{[2]}$ *est définie comme suit : écrivons un élément* (x, u, t) *de* $U^{[2]}$ *sous la forme* $((v_\emptyset, v_1, t_1), (v_2, v_{12}, t_{12}), t_2) \in U^{[2]}$*, avec* x

dans $U^{[1]}$, *u dans* $V^{[1]}$ *et t dans* $\mathbb{K}$ *tels que* $x+tu$ *appartienne à* $U^{[1]}$. *Pour tout r dans* $\mathbb{K}^{\times}$, *posons*

$$\begin{aligned}\rho_{[2]}(r).\left(\left(v_{\emptyset}, v_1, t_1\right), \left(v_2, v_{12}, t_{12}\right), t_2\right) &:= \left(\rho_{[1]}(r).x, r\rho_{[1]}(r).u, r^{-1}t\right) \\ &= \left(\left(v_{\emptyset}, rv_1, r^{-1}t_1\right), \left(rv_2, r^2 v_{12}, t_{12}\right), r^{-1}t_2\right).\end{aligned}$$

*Par récurrence, nous définissons l'*action canonique cubique $\rho_{[k+1]} : \mathbb{K}^{\times} \times U^{[k+1]} \to U^{[k+1]}$ *par*

$$\rho_{[k+1]}(r).\left(x,u,t\right) := \left(\rho_{[k]}(r).x\,,\ r\rho_{[k]}(r).u\,,\ r^{-1}t\right),$$

qui peut également s'écrire

$$\rho_{[k+1]}(r).\left(\left(v_I\right)_{I\subset\{1,\ldots,k+1\}}, \left(t_I\right)_{\emptyset\neq I\subset\{1,\ldots,k+1\}}\right) := \left(\left(r^{|I|}v_I\right)_I, \left(r^{|I|-2}t_I\right)_{\emptyset\neq I}\right), \qquad (2.1.1)$$

où l'entier $|I|$ *désigne le cardinal de l'ensemble* I.

Remarquez que pour tout entier naturel k, les ensembles $U^{]k[}$ et $\mathrm{T}^k U$ sont stables sous l'action $\rho_{[k]}$. Les projections et injections canoniques sont équivariantes sous cette action. Notez que l'opérateur $\rho_{[k]}(r)$ est $\mathbb{K}$-linéaire. Un élément de $U^{[k]}$ sera dit *homogène de degré* ℓ si c'est un vecteur propre, pour tout opérateur $\rho_{[k]}(r)$, avec r dans $\mathbb{K}^{\times}$, pour la valeur propre r^{ℓ}. Par exemple, les éléments x de la base U sont homogènes de degré 0 et les variables d'espace v_I sont homogènes de degré $|I|$. On note V_I la copie de V correspondant à la variable de temps v_I, ceci pour toute partie I de $\{1,\ldots,k\}$.

Pour bien comprendre la structure des domaines cubiques d'ordre k, nous pouvons poursuivre l'analogie entre les variables d'espace et les sommets d'un hypercube.

À l'ordre 2, les variables d'espace s'organisent de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & V_{12} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
V_1 \arrow[dr, dash] & & V_2 \arrow[dl, dash] \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, il existe une variable homogène de degré 0, correspondant à la base U, deux variables homogènes de degré 1, correspondant au premier étage, formé de V_1 et V_2 et une variable homogène de degré 2, correspondant à V_{12}.

À l'ordre 3, les variables d'espace s'organisent de manière similaire :

$$\begin{tikzcd}
 & & V_{123} \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
V_{12} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & V_{13} \arrow[dll, dash] \arrow[dr, dash] & V_{23} \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \\
V_1 \arrow[dr, dash] & V_2 \arrow[d, dash] & & V_3 \arrow[dll, dash] \\
 & U & &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, il existe une variable homogène de degré 0, correspondant à la base U, trois variables homogènes de degré 1, correspondant au premier étage, formé de V_1, V_2 et V_3, trois variables homogènes de degré 2, correspondant au deuxième étage, formé de V_{12}, V_{13} et V_{23} et une variable homogène de degré 3, correspondant à V_{123}.

Ce schéma se généralise à l'ordre k et nous avons alors $\binom{k}{j}$ variables homogènes de degré j correspondant au j-ième étage de l'hypercube de dimension k, formé des espaces V_I pour toute partie I de $\{1, \dots, k\}$ de cardinal j.

2.1.3 Ordre supérieur, version simpliciale

L'idée de définir les domaines cubiques par récurrence est simple et naturelle, mais, comme nous venons de le voir, assez difficile à manipuler en raison du grand nombre de variables impliquées. Afin de pouvoir travailler de manière explicite à un ordre élevé, nous avons besoin d'une autre famille de domaines, les domaines simpliciaux, et nous expliquons la relation avec les domaines cubiques. Nous considérons, dans toute la suite, que s_0 est fixé égal à 0. Rappelons la convention $U^{\langle 0\rangle} = U$ pour l'ordre 0.

Définition 2.1.5 (Domaines simpliciaux)**.** *Nous définissons les* domaines simpliciaux.

$$\begin{aligned} U^{\langle 1\rangle} &:= U^{[1]} \\ U^{\langle 2\rangle} &:= \left\{ (v_0, v_1, v_2; s_1, s_2) \in V^3 \times \mathbb{K}^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} v_0 \in U, v_0 + (s_1 - s_0)v_1 \in U, \\ v_0 + (s_2 - s_0)v_1 + (s_2 - s_1)(s_2 - s_0)v_2 \in U \end{array} \right\} \end{aligned}$$

et, de manière générale, pour tout entier naturel k, les domaines simpliciaux d'ordre k

$$U^{\langle k\rangle} := \left\{ (\boldsymbol{v}; \boldsymbol{s}) \in V^{k+1} \times \mathbb{K}^k \,\middle|\, v_0 \in U, \quad \forall i = 1, \dots, k : \ v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{m=0}^{j-1} (s_i - s_m) v_j \in U \right\},$$

les domaines simpliciaux non singuliers

$$U^{\rangle k\langle} := \left\{ (\boldsymbol{v}; \boldsymbol{s}) \in U^{\langle k\rangle} \mid \forall i \neq m : s_i - s_m \in \mathbb{K}^\times \right\},$$

et les domaines simpliciaux les plus singuliers *ou* domaines des k-jets

$$\mathrm{J}^k U := \left\{ (\boldsymbol{v}; \boldsymbol{0}) \in U^{\langle k\rangle} \right\} \cong U \times V^k.$$

Justifions la définition de $U^{\langle k\rangle}$. Pour $k = 1$, afin de définir le quotient de différence d'une application f, nous avons besoin d'évaluer f aux points x et $x + tv$ et de considérer l'inverse du scalaire t. À un ordre supérieur, nous aurons de même besoin de considérer l'évaluation de f en des combinaisons $\mathbb{K}$-linéaires des éléments v_i et l'inversion par les coefficients scalaires de ces combinaisons.

Comme dans le cas cubique, les éléments de V sont appelés *variables d'espace*, et les éléments de $\mathbb{K}$ *variables de temps.* Cette fois, pour tout domaine d'ordre k, le nombre de variables d'espace est $k+1$. Chaque variable d'espace peut ainsi être représentée par le sommet d'un k-simplexe, ce qui est à l'origine du terme *simplicial* utilisé ici.

Les domaines simpliciaux s'organisent de la même manière que les domaines cubiques,

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r] & U^{\rangle 1 \langle} \arrow[r] \arrow[d] & U^{\rangle 2 \langle} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & U^{\rangle k \langle} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
U \arrow[r] & U^{\langle 1 \rangle} \arrow[r] & U^{\langle 2 \rangle} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & U^{\langle k \rangle} \arrow[r] & \dots \\
U \arrow[r] & \mathrm{J}U \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{J}^2 U \arrow[r] \arrow[u] & \dots \arrow[r] & \mathrm{J}^k U \arrow[r] \arrow[u] & \dots
\end{tikzcd}
$$

où les flèches horizontales sont des injections et les flèches verticales des inclusions.

Il existe, pour tout entier j inférieur à k, des applications

$$\pi^{\langle k \rangle}_{\langle j \rangle} : U^{\langle k \rangle} \to U^{\langle j \rangle},$$

appelées *projections canoniques.* Leurs sections

$$\sigma^{\langle k \rangle}_{\langle j \rangle} : U^{\langle j \rangle} \to U^{\langle k \rangle}$$

sont appelées *injections canoniques.* Comme dans le cas cubique, ces applications préservent les domaines non singuliers et les domaines des jets.

Comparé au cas cubique, cette définition possède deux avantages : elle est explicite, et le nombre de variables augmente linéairement en fonction de l'ordre, et non plus exponentiellement. En contrepartie, elle n'est pas définie par récurrence. Nous surmonterons cette difficulté en injectant les domaines simpliciaux dans les domaines cubiques (voir le lemme 2.1.7 ci-dessous). Notez que dans [Bertram 2010], s_0 était considéré comme une variable. Puisque toutes les formules simpliciales font appel aux différences $s_i - s_j$, cette variable peut être fixée et considérée comme prenant toujours la valeur $s_0 = 0$, ce que nous ferons ici.

Le groupe unité $\mathbb{K}^\times$ agit de manière naturelle sur les domaines simpliciaux :

Définition 2.1.6. *Pour tout entier naturel k, l'*action canonique simpliciale $\rho_{\langle k \rangle}$ *de $\mathbb{K}^\times$ sur $U^{\langle k \rangle}$ est définie par*

$$\rho_{\langle k \rangle}(r).\,(v_0, v_1, \dots, v_k; s_1, \dots, s_k) := \Big(v_0, rv_1, r^2 v_2, \dots, r^k v_k; r^{-1} s_1, \dots, r^{-1} s_k\Big)\,. \tag{2.1.2}$$

Il est immédiat que $\rho_{\langle k \rangle}(r)(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{s})$ appartient à $U^{\langle k \rangle}$ si et seulement si $(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{s})$ lui-même appartient à $U^{\langle k \rangle}$, et que les sous-ensembles $U^{\rangle k \langle}$ et $\mathrm{J}^k U$ sont stables sous cette action.

Comme dans le cas cubique, les projections et injections canoniques sont équivariantes sous l'action de $\mathbb{K}^\times$, et nous pouvons parler d'*éléments homogènes (de degré ℓ).* À nouveau, les éléments de la base U sont homogènes de degré 0. Une différence importante avec le cas cubique est que les scalaires sont toujours homogènes du même degré : -1. De plus, contrairement au cas cubique, pour tout entier i inférieur à k, il n'y a plus qu'une seule variable d'espace homogène de degré i dans les domaines simpliciaux d'ordre k.

2.1.4 Injection équivariante des domaines simpliciaux dans les domaines cubiques

Les aspects cubique et simplicial ont tous deux leurs avantages et il sera parfois nécessaire de passer d'un point de vue à l'autre, ce que permet le lemme suivant qui définit une injection équivariante des domaines simpliciaux dans les domaines cubiques :

Lemme 2.1.7. *Pour tout entier k, l'application $g_k : U^{\langle k\rangle} \to U^{[k]}$ définie par $g_k(\boldsymbol{v};\boldsymbol{s}) := (\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})$ avec, pour tout $I \subset \{1,\ldots,k\}$,*

$$u_I = \begin{cases} v_0 & si \quad I = \emptyset \\ v_i & si \quad I = \{1,\ldots,i\} \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad t_I = \begin{cases} 1 & si \quad I = \{i,i+1\} \\ s_i - s_{i-1} & si \quad I = \{i\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est bien définie, $\mathbb{K}$-affine, $\mathbb{K}^\times$-équivariante, et est une injection de $U^{\langle k\rangle}$ dans $U^{[k]}$. De plus, $U^{\rangle k\langle}$ est envoyé par g_k dans $U^{]k[}$.

Démonstration.

1. *Bien définie* : le fait que $g_k\left(U^{\langle k\rangle}\right)$ soit inclus dans $U^{[k]}$ est facilement vérifié (c'est une conséquence de la récurrence utilisée au lemme 1.5 de l'article [Bertram 2010]).
2. $\mathbb{K}$-*affine* : c'est trivial. Notez que l'application g_k n'envoie *pas* $\mathrm{J}^k U$ dans $\mathrm{T}^k U$, mais sur un translaté de $\mathrm{T}^k U$.
3. $\mathbb{K}^\times$-*équivariance* : afin de prouver la relation

$$g_k \circ \rho_{\langle k\rangle}(r) = \rho_{[k]}(r) \circ g_k,$$

nous étudions séparément les variables d'espace et de temps :
   - variables d'espace $\boldsymbol{v}$: les éléments homogènes v_i de degré i sont envoyés sur des éléments homogènes de degré i puisque $|\{1,\ldots,i\}| = i$.
   - variables d'espace $\boldsymbol{s}$: les éléments homogènes s_i de degré -1 sont envoyés sur des éléments homogènes de degré -1 puisque $|\{i\}| = 1$ et, pour $|I| = 2$, l'action du groupe $\mathbb{K}^\times$ sur les scalaires homogènes est triviale.
4. *Injectivité* : l'application g_k est clairement injective : l'inverse (de sa corestriction à $g_k\left(U^{\langle k\rangle}\right)$) est donné par : ${g_k}^{-1}_{|g_k(U^{\langle k\rangle})}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}) := (\boldsymbol{v};\boldsymbol{s})$ avec

$$\begin{cases} v_0 &= u_\emptyset \\ v_i &= u_{\{1,\ldots,i\}} \quad \text{pour tout } i \geq 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} s_0 &= 0 \\ s_i &= \displaystyle\sum_{j=1}^{i} t_{\{j\}} \quad \text{pour tout } i \geq 1. \end{cases}$$

Notez que cet inverse est également $\mathbb{K}$-affine.

□

La preuve montre que les scalaires t_I avec $|I| = 2$ jouent un rôle spécial puisque ce sont les seuls qui sont homogènes de degré zéro ; on peut dire que ce sont des sortes de pivot.

Pour $k = 1$, g_1 est l'identité, et pour $k = 2, 3$, nous avons explicitement

$$g_2(v_0,v_1,v_2;s_1,s_2) = ((v_0,v_1,s_1),(0,v_2,1),s_2 - s_1)\ ,$$

$$g_3(v_0, v_1, v_2, v_3; s_1, s_2, s_3) = \left(\left(\left(v_0, v_1, s_1\right), \left(0, v_2, 1\right), s_2 - s_1\right), \left(\left(0, 0, 0\right), \left(0, v_3, 0\right), 1\right), s_3 - s_2\right) .$$

Ces exemples nous montrent que le point de vue simplicial est plus agréable que le point de vue cubique, pour lequel il est très difficile d'écrire des formules explicites dès que l'ordre est supérieur à 3.

Après avoir défini les domaines étendus, la prochaine étape est la construction des généralisations du quotient de différence, à tout ordre, et dont les domaines de définition seront précisément les ensembles non singuliers que nous venons d'introduire.

2.2 Calcul de différences

Considérons un autre $\mathbb{K}$-module W, ainsi qu'une application $f : U \subset V \to W$, où U est toujours un sous-ensemble non vide d'un $\mathbb{K}$-module V. Notez que nous n'utilisons toujours aucune notion topologique ici mais uniquement algébrique.

Nous définissons les quotients de différences cubiques $f^{]k[}$ d'ordre k puis les quotients de différences simpliciaux $f^{\rangle k \langle}$ d'ordre k, également appelés *différences divisées généralisées*. L'application g_k va les injecter dans le calcul différentiel cubique. Ces applications sont les généralisations à l'ordre k du quotient de différence $\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ de l'application f et seront définies sur les domaines cubiques $U^{]k[}$ et simpliciaux $U^{\rangle k \langle}$ non singuliers.

2.2.1 Ordre 0 et ordre 1

Par convention, nous posons $f^{]0[} := f =: f^{\rangle 0 \langle}$.

Le *quotient de différence du premier ordre de f* est l'application

$$f^{]1[} : U^{]1[} \to W, \quad (x, v, t) \mapsto \frac{f(x+tv)-f(x)}{t},$$

et l'*application tangente étendue* est l'application

$$\mathrm{T}^{]1[} f : U^{]1[} \to W^{]1[}, \quad (x, v, t) \mapsto \Big(f(x), f^{]1[}(x, v, t), t\Big) .$$

2.2.2 Quotients de différences cubiques

Définition 2.2.1 (Quotients de différences cubiques)**.** *Les* quotients de différences cubiques de degré supérieur *et les* applications tangentes étendues d'ordre supérieur *sont définis par récurrence de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} f^{]k+1[} &:= \left(f^{]k[}\right)^{]1[} : U^{]k+1[} \to W, \\ \mathrm{T}^{]k+1[} f &:= \left(\mathrm{T}^{]k[}\right)^{]1[} : U^{]k+1[} \to W^{]k+1[}. \end{aligned}$$

Le théorème suivant montre que $\mathrm{T}^{]k[}$ vérifie les propriétés d'un foncteur covariant et est équivariant pour l'action $\rho_{[k]}$ de $\mathbb{K}^{\times}$ définie en 2.1.1.

Théorème 2.2.2. *Soient $f : U \to W$ et $g : U' \to W'$ deux applications telles que $f(U) \subset U'$. Alors, pour tout entier naturel k, nous avons les propriétés suivantes.*

i) Fonctorialité : $\mathrm{T}^{]k[}(g \circ f) = \mathrm{T}^{]k[}g \circ \mathrm{T}^{]k[}f$ *et* $\mathrm{T}^{]k[}\mathrm{id}_U = \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{]k[}U}$.

ii) Homogénéité : pour tout r *dans* $\mathbb{K}^\times$, $\mathrm{T}^{]k[}f \circ \rho_{[k]}(r) = \rho_{[k]}(r) \circ \mathrm{T}^{]k[}f$.

Démonstration. (i) Pour $k = 1$, la fonctorialité covariante est prouvée par un calcul direct :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{]1[}(x, v, t) &= \frac{g \circ f(x + tv) - g \circ f(x)}{t} = \frac{g\left(f(x) + t\dfrac{f(x + tv) - f(x)}{t}\right) - g(f(x))}{t} \\
&= g^{]1[}\left(f(x), \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, t\right) = g^{]1[}\left(f(x), f^{]1[}(x, v, t), t\right) \\
&= g^{]1[}\left(\mathrm{T}^{]1[}f(x, v, t)\right)
\end{aligned}$$

et pour $k > 1$, c'est immédiat par récurrence (voir [Bertram, Glöckner, Neeb 2004]).

(ii) Pour $k = 1$, la $\mathbb{K}^\times$-équivariance se prouve à nouveau par un calcul direct :

$$\mathrm{T}^{]1[}f(x, rv, r^{-1}t) = \left(f(x), \frac{f(x + r^{-1}trv) - f(x)}{r^{-1}t}, r^{-1}t\right) = \left(f(x), rf^{]1[}(x, v, t), r^{-1}t\right)$$

et pour $k > 1$, les résultats sont obtenus par récurrence. □

2.2.3 Quotients de différences simpliciaux

Définissons à présent les quotients de différences simpliciaux, qui peuvent être décrits de manière explicite, contrairement aux quotients de différences cubiques. Rappelons-nous que la variable s_0 est en fait fixée égale à 0.

Définition 2.2.3 (Quotients de différences simpliciaux)**.** *Pour une application* $f : U \to W$, *nous définissons les* différences divisées (généralisées) $f^{\rangle k\langle} : U^{\rangle k\langle} \to W$ *par*

$$\begin{aligned}
f^{\rangle 1\langle}(v_0, v_1; s_1) &:= f^{]1[}(v_0, v_1, s_1) = \frac{f(v_0)}{s_0 - s_1} + \frac{f(v_0 + (s_1 - s_0)v_1)}{s_1 - s_0}, \\
f^{\rangle 2\langle}(v_0, v_1, v_2; s_1, s_2) &:= \frac{f(v_0)}{(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} + \frac{f(v_0 + (s_1 - s_0)v_1)}{(s_1 - s_0)(s_1 - s_2)} \\
&\quad + \frac{f(v_0 + (s_2 - s_0)v_1 + (s_2 - s_1)(s_2 - s_0)v_2)}{(s_2 - s_0)(s_2 - s_1)},
\end{aligned}$$

et, de manière générale, pour tout entier naturel k,

$$\begin{aligned}
f^{\rangle k\langle}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{s}) &:= \frac{f(v_0)}{\prod_{j=1}^{k}(s_0 - s_j)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{f\left(v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{m=0}^{j-1}(s_i - s_m)v_j\right)}{\prod_{j=0,\ldots,\hat{i},\ldots,k}(s_i - s_j)} \\
&= \frac{f(v_0)}{(s_0 - s_1) \cdot \ldots \cdot (s_0 - s_k)} + \frac{f\left(v_0 + (s_1 - s_0)v_1\right)}{(s_1 - s_0)(s_1 - s_2) \cdot \ldots \cdot (s_1 - s_k)} \\
&\quad + \frac{f\left(v_0 + (s_2 - s_0)v_1 + (s_2 - s_1)(s_2 - s_0)v_2\right)}{(s_2 - s_0)(s_2 - s_1)(s_2 - s_3) \cdot \ldots \cdot (s_2 - s_k)} + \ldots \\
&\quad + \frac{f\left(v_0 + (s_k - s_0)v_1 + \ldots + (s_k - s_{k-1})(s_k - s_{k-2}) \cdot \ldots \cdot (s_k - s_0)v_k\right)}{(s_k - s_0)(s_k - s_1) \cdot \ldots \cdot (s_k - s_{k-1})}
\end{aligned}$$

Nous définissons le k-jet étendu *par* $\mathrm{J}^{\rangle k\langle} f : U^{\rangle k\langle} \to W^{\rangle k\langle}$,

$$(\boldsymbol{v};\boldsymbol{s}) \mapsto \mathrm{J}^{\rangle k\langle} f(\boldsymbol{v};\boldsymbol{s}) := \Big(f(v_0), f^{\rangle 1\langle}(v_0,v_1;s_1), \ldots, f^{\rangle k\langle}(v_0,\ldots,v_k;s_1,\ldots,s_k); \boldsymbol{s} \Big) .$$

Nous remarquons que $f^{\rangle 1\langle}(x,v,t) = f^{]1[}(x,v,t)$, ce qui montre que les quotients de différences cubiques et simpliciaux coïncident à l'ordre 1.

2.2.4 Injection du calcul de différences simplicial dans le calcul de différences cubique

Théorème 2.2.4. *Pour tout entier naturel* k*, l'application* $g_k : U^{\langle k\rangle} \to U^{[k]}$*, définie au lemme 2.1.7, qui envoie* $U^{\rangle k\langle}$ *dans* $U^{]k[}$*, définit une injection du calcul de différences simplicial dans le calcul de différences cubique, dans le sens où, pour toute application* $f : U \to W$*, le diagramme suivant commute :*

$$\mathrm{T}^{]k[} f \circ g_k = (-1)^k g_k \circ \mathrm{J}^{\rangle k\langle} f \ : \qquad \begin{array}{ccc} U^{\rangle k\langle} & \xrightarrow{\mathrm{J}^{\rangle k\langle} f} & W^{\rangle k\langle} \\ {\scriptstyle g_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-1)^k g_k} \\ U^{]k[} & \xrightarrow{\mathrm{T}^{]k[} f} & W^{]k[} \end{array}$$

Notez que quelles que soient les conventions choisies, il nous semble impossible d'éviter le terme $(-1)^k$.

Afin de prouver ce théorème, nous avons besoin du lemme 1.5 de l'article [Bertram 2010] qui donne une relation de récurrence entre les quotients de différences simpliciaux.

Lemme 2.2.5. *La formule de récurrence suivante est satisfaite pour tout entier naturel* k *: pour tout élément* $\boldsymbol{s}$ *de* $\mathbb{K}^{k+1}$ *non singulier,*

$$\begin{aligned} & f^{\rangle k+1\langle}(v_0,\ldots,v_{k+1};s_1,\ldots,s_{k+1}) \\ = \ & -\Big(f^{\rangle k\langle}\Big)^{]1[}\left((v_0,\ldots,v_k;s_1,\ldots,s_k),(\mathbf{0},v_{k+1};\mathbf{0},1),s_{k+1}-s_k\right) \\ = \ & \frac{1}{s_k - s_{k+1}} \Big(f^{\rangle k\langle}(v_0,\ldots,v_k;s_1,\ldots,s_k) \\ & \quad - f^{\rangle k\langle}\left(v_0,v_1,\ldots,v_{k-1},v_k+(s_{k+1}-s_k)v_{k+1};s_1,\ldots,s_{k-1},s_{k+1}\right)\Big). \end{aligned}$$

Démonstration. Par définition même du quotient de différence du premier ordre, le membre de droite de cette équation est égal au membre du milieu. Nous allons calculer le membre de droite et montrer qu'il est égal au membre de gauche $f^{\rangle k+1\langle}(v_0,\ldots,v_{k+1};s_1,\ldots,s_{k+1})$. Pour cela, réécrivons la formule explicite et observons que, dans la définition de

$$f^{\rangle k\langle}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{s}) := \frac{f(v_0)}{\displaystyle\prod_{j=1,\ldots,k}(s_0-s_j)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{f\left(v_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{i}\prod_{m=0}^{j-1}(s_i-s_m)v_j\right)}{\displaystyle\prod_{j=0,\ldots,\hat{\imath},\ldots,k}(s_i-s_j)},$$

les évaluations de f en $k+1$ points apparaissent, et le $(i+1)$-ème point, à savoir

$$v_0 + \sum_{j=1}^{i} \prod_{m=0}^{j-1} (s_i - s_m) v_j,$$

ne dépend que de $(v_0, \ldots, v_i; s_1, \ldots, s_i)$. Ainsi, les k premiers points en lesquels f est évaluée sont les mêmes pour les deux termes dont on considère la différence dans le membre de droite. Seul le dernier point, correspondant à $i = k$, diffère puisque seule la dernière variable d'espace et la dernière variable de temps diffèrent.

Calculons, dans le membre de droite, la différence des $(i+1)$-ème termes pour tout $0 \leq i \leq k-1$.

En utilisant l'identité algébrique

$$\frac{1}{a-c}\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{b-c}\right) = \frac{1}{(b-a)(b-c)},$$

nous obtenons, pour tout entier $0 \leq j \leq k-1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s_k - s_{k+1}}\left(\frac{f\left(v_0 + (s_j - s_0)v_1 + \ldots + (s_j - s_{j-1})\ldots(s_j - s_0)v_j\right)}{(s_j - s_k)\displaystyle\prod_{0 \leq i \neq j \leq k-1}(s_j - s_i)}\right. \\
&\qquad\left. - \frac{f\left(v_0 + (s_j - s_0)v_1 + \ldots + (s_j - s_{j-1})\ldots(s_j - s_0)v_j\right)}{(s_j - s_{k+1})\displaystyle\prod_{0 \leq i \neq j \leq k-1}(s_j - s_i)}\right) \\
= \;& \frac{1}{s_k - s_{k+1}}\left(\frac{1}{s_j - s_k} - \frac{1}{s_j - s_{k+1}}\right)\frac{f\left(v_0 + (s_j - s_0)v_1 + \ldots + (s_j - s_{j-1})\ldots(s_j - s_0)v_j\right)}{\displaystyle\prod_{0 \leq i \neq j \leq k-1}(s_j - s_i)} \\
= \;& \frac{f\left(v_0 + (s_j - s_0)v_1 + \ldots + (s_j - s_{j-1})\ldots(s_j - s_0)v_j\right)}{\displaystyle\prod_{0 \leq i \neq j \leq k+1}(s_j - s_i)}
\end{aligned}$$

qui est précisément le $(j+1)$-ème terme apparaissant dans la définition de $f^{\rangle k+1 \langle}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s})$.

Il reste à prouver que la différence des derniers termes, correspondant à $i = k$, du membre de droite, à savoir

$$\frac{1}{s_k - s_{k+1}} \frac{f\left(v_0 + (s_k - s_0)v_1 + \ldots + (s_k - s_{k-1})\ldots(s_k - s_0)v_k\right)}{\displaystyle\prod_{i=0,\ldots,k-1}(s_k - s_i)}$$

$$-\frac{1}{s_k - s_{k+1}} \frac{f\left(v_0 + (s_{k+1} - s_0)v_1 + \ldots + (s_{k+1} - s_{k-1})\ldots(s_{k+1} - s_0)(v_k + (s_{k+1} - s_k)v_{k+1})\right)}{\displaystyle\prod_{i=0,\ldots,k-1}(s_{k+1} - s_i)},$$

mène exactement aux deux derniers termes de la définition de $f^{\rangle k+1\langle}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})$. À partir de

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s_k-s_{k+1}}\frac{f\left(v_0+(s_k-s_0)v_1+\ldots+(s_k-s_{k-1})\ldots(s_k-s_0)v_k\right)}{\displaystyle\prod_{i=0,\ldots,k-1}(s_k-s_i)}\\
=\;&\frac{f\left(v_0+(s_k-s_0)v_1+\ldots+(s_k-s_{k-1})\ldots(s_k-s_0)v_k\right)}{\displaystyle\prod_{i=0,\ldots,\hat{k},k+1}(s_k-s_i)},
\end{aligned}$$

nous obtenons directement le k-ème terme, et à partir de

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{s_k-s_{k+1}}\frac{f\left(v_0+(s_{k+1}-s_0)v_1+\ldots+\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(s_{k+1}-s_i)(v_k+(s_{k+1}-s_k)v_{k+1})\right)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(s_{k+1}-s_i)}\\
=\;&\frac{f\left(v_0+(s_{k+1}-s_0)v_1+\ldots+\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(s_{k+1}-s_i)(v_k+(s_{k+1}-s_k)v_{k+1})\right)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{k}(s_{k+1}-s_i)},
\end{aligned}$$

nous obtenons le dernier terme. □

Démonstration. Revenons à la démonstration du théorème 2.2.4. D'après le lemme précédent, pour tout entier naturel k, pour tout $\boldsymbol{s}\in\mathbb{K}^{k+1}$ non singulier,

$$\begin{aligned}
f^{\rangle k+1\langle}(v_0,\ldots,v_{k+1};s_1,\ldots,s_{k+1})=\frac{1}{s_k-s_{k+1}}\Big(&f^{\rangle k\langle}(v_0,\ldots,v_k;s_1,\ldots,s_k)\\
&-f^{\rangle k\langle}\left(v_0,v_1,\ldots,v_{k-1},v_k+(s_{k+1}-s_k)v_{k+1};s_1,\ldots,s_{k-1},s_{k+1}\right)\Big)
\end{aligned}$$

et est donc exactement de la forme d'un quotient de différence du premier ordre, égal à

$$-\left(f^{\rangle k\langle}\right)^{]1[}\left((v_0,\ldots,v_k;s_1,\ldots,s_k),(\mathbf{0},v_{k+1};\mathbf{0},1),s_{k+1}-s_k\right).$$

Le résultat est alors obtenu par récurrence : à l'étape 2, nous obtenons

$$+\left(f^{\rangle k-1\langle}\right)^{]2[}\Big(\big((v_0,\ldots,v_{k-1};s_1,\ldots,s_{k-1});(\mathbf{0},v_k;\mathbf{0},1),s_k-s_{k-1}\big),(\mathbf{0};(\mathbf{0},v_{k+1};\mathbf{0}),1),s_{k+1}-s_k\Big).$$

car

$$f^{\rangle k\langle}(v_0,\ldots,v_k;s_1,\ldots,s_k)=-\left(f^{\rangle k-1\langle}\right)^{]1[}\left((v_0,\ldots,v_{k-1};s_1,\ldots,s_{k-1}),(\mathbf{0},v_k;\mathbf{0},1),s_k-s_{k-1}\right).$$

et ainsi de suite puis nous comparons avec l'expression de g_k. □

Remarquez qu'à partir de la formule démontrée dans le lemme ci-dessus, nous pouvons déduire un mécanisme qui à toute application F de $U^{\rangle k\langle}$ dans W associe une application $\tilde{F}$

de $U^{\rangle k+1\langle}$ dans W, définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}(v_0,\ldots,v_{k+1};s_1,\ldots,s_{k+1})\\
=\;& -F^{]1[}\left((v_0,\ldots,v_k;s_1,\ldots,s_k),(\mathbf{0},v_{k+1};\mathbf{0},1),s_{k+1}-s_k\right)\\
=\;& \frac{1}{s_k-s_{k+1}}\Big(F(v_0,\ldots,v_k;s_1,\ldots,s_k)\\
&\quad -F\left(v_0,v_1,\ldots,v_{k-1},v_k+(s_{k+1}-s_k)v_{k+1};s_1,\ldots,s_{k-1},s_{k+1}\right)\Big).
\end{aligned}$$

Bien sûr, si l'application F est égale à $f^{\rangle k\langle}$ pour une certaine application f de U dans W, alors l'application $\tilde{F}$ est égale à $f^{\rangle k+1\langle}$.

2.3 Jets étendus

Comme dans le cas cubique, J^k vérifie les propriétés de fonctorialité covariante et d'équivariance pour l'action simpliciale $\rho_{\langle k\rangle}$ de $\mathbb{K}^\times$ (voir la définition 2.1.6).

Théorème 2.3.1. *Soient $f: U\to W$ et $g: U'\to W'$ deux applications telles que $f(U)\subset U'$. Alors, pour tout entier naturel k, nous avons les deux propriétés suivantes.*

i) Fonctorialité : $\mathrm{J}^{\rangle k\langle}(g\circ f)=\mathrm{J}^{\rangle k\langle}g\circ \mathrm{J}^{\rangle k\langle}f$ *et* $\mathrm{J}^{\rangle k\langle}\mathrm{id}_U=\mathrm{id}_{\mathrm{J}^{\rangle k\langle}U}$.

ii) Homogénéité : pour tout r dans $\mathbb{K}^\times$, $\mathrm{J}^{\rangle k\langle}f\circ\rho_{\langle k\rangle}(r)=\rho_{\langle k\rangle}(r)\circ \mathrm{J}^{\rangle k\langle}f$.

Démonstration. Une preuve indépendante du point (i) est donnée au théorème 1.10 de l'article [Bertram 2010] et une preuve du point (ii) peut également être donnée par calcul direct. Plus simplement, les deux assertions peuvent également être vues comme des conséquences du théorème 2.2.4 d'injection du calcul simplicial dans le calcul cubique, qui permet de se ramener au théorème 2.2.2 ci-dessus, qui en est une version cubique.

Donnons tout de même la preuve directe donnée par Bertram, qui aide à comprendre les jets simpliciaux étendus.

Fixons un élément $\boldsymbol{s}$ de $\mathbb{K}^{k+1}$ non singulier, c'est-à-dire tel que s_i-s_j soit inversible pour tous $i\neq j$ et prouvons l'assertion pour $\mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})}f:=\mathrm{J}^k f(\cdot;\boldsymbol{s})^t$, où ^{t} signifie que nous considérons $\mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})}f(\boldsymbol{v})$ comme un vecteur colonne.

Montrons par récurrence que $\mathrm{id}^{\langle k\rangle}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{s})=v_k$. En effet, pour $k=0$ et $k=1$, c'est une conséquence directe des définitions. En utilisant la formule de récurrence du lemme 2.2.5, nous obtenons

$$\mathrm{id}^{<k+1>}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{s})=\frac{v_k-(v_k+(s_{k+1}-s_k)v_{k+1})}{s_k-s_{k+1}}=v_{k+1}.$$

Ainsi, $\mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})}\mathrm{id}_U=\mathrm{id}_{\mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})}U}$.

Montrons maintenant que, pour tout $\boldsymbol{s}\in\mathbb{K}^k$ non singulier, $\mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})}f$ est linéairement conjugué au produit direct $\times^{k+1}f:\times^{k+1}U\to\times^{k+1}W$. Afin de prouver ceci, nous définissons l'opérateur linéaire

$$\Psi_{\boldsymbol{s}}: V^{k+1}\to W^{k+1},\quad \boldsymbol{v}\mapsto\left(v_0+(s_i-s_0)v_1+\ldots+\prod_{j=0}^{i}(s_i-s_j)v_i\right)_{0\le i\le k}$$

qui peut être identifié à la matrice triangulaire inférieure, inversible, de taille $(k+1)\times(k+1)$

$$\Psi_{\boldsymbol{s}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & s_1 - s_0 & & & \\ 1 & s_2 - s_0 & (s_2 - s_1)(s_2 - s_0) & & \\ & & & & \\ 1 & s_k - s_0 & (s_k - s_1)(s_k - s_0) & \dots & \prod_{i=0}^{k-1}(s_k - s_i) \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

L'opérateur $\Psi_{\boldsymbol{s}}$ est inversible car il en est de même de sa représentation matricielle. L'inverse est donné par

$$\Psi_{\boldsymbol{s}}^{-1} : W^{k+1} \to V^{k+1},$$

$$\mathbf{w} \mapsto (\Psi_{\boldsymbol{s}}^{-1}\mathbf{w})_{0\le i\le k} = \left(\frac{w_0}{\prod_{1\le m\le k}(s_0 - s_m)} + \sum_{j=1}^{i} \frac{w_j}{\prod_{0\le m\ne j\le k}(s_j - s_m)} \right)_{0\le i\le k},$$

qui peut être identifié avec la matrice triangulaire inférieure suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ (s_0 - s_1)^{-1} & (s_1 - s_0)^{-1} & & \\ ((s_0 - s_1)(s_0 - s_2))^{-1} & ((s_1 - s_2)(s_1 - s_0))^{-1} & ((s_2 - s_1)(s_2 - s_0))^{-1} & \\ \dots & & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

En reprenant la définition des jets étendus, nous observons directement que la relation suivante est vérifiée

$$\Psi_{\boldsymbol{s}}^{-1} \circ (\times^{k+1} f) \circ \Psi_{\boldsymbol{s}} = \mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})} f, \tag{2.3.2}$$

où $\times^{k+1} f : U^{k+1} \to W^{k+1}$ désigne le produit direct $k+1$ fois de f avec lui-même. L'opérateur $\mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})}$ est ainsi linéairement conjugué au foncteur de produit direct et est donc lui-même un foncteur covariant. Finalement, pour f et g comme dans le théorème, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})}(g\circ f) &= \Psi_{\boldsymbol{s}}^{-1} \circ \left(\times^{k+1}(g\circ f)\right) \circ \Psi_{\boldsymbol{s}} \\ &= \Psi_{\boldsymbol{s}}^{-1} \circ \left(\times^{k+1} g\right) \circ \left(\times^{k+1} f\right) \circ \Psi_{\boldsymbol{s}} \\ &= \Psi_{\boldsymbol{s}}^{-1} \circ \left(\times^{k+1} g\right) \circ \Psi_{\boldsymbol{s}} \circ \Psi_{\boldsymbol{s}}^{-1} \circ \left(\times^{k+1} f\right) \circ \Psi_{\boldsymbol{s}} \\ &= \mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})} g \circ \mathrm{J}^k_{(\boldsymbol{s})} f\,. \end{aligned}$$

□

Notez qu'il est utile et pratique de considérer $\Psi_{\boldsymbol{s}}$ comme une sorte de changement de variables, qui est bijectif tant que $\boldsymbol{s}$ est non singulier, et qui permet en un sens de trivialiser la situation.

Chapitre 3

Calculs différentiels

Le calcul différentiel est l'extension du calcul de différences aux valeurs singulières. Pour cela, nous avons besoin d'une structure supplémentaire telle que, par exemple, une topologie. Nous allons par conséquent supposer que $\mathbb{K}$, en plus d'être un anneau commutatif unitaire, est topologique. L'unicité de l'extension aux valeurs singulières est garantie par l'hypothèse supplémentaire suivante : le groupe unité $\mathbb{K}^\times$ est ouvert dense dans $\mathbb{K}$. On dira alors que $\mathbb{K}$ est un *anneau de base admissible*. Nous munissons également les objets précédemment considérés de structures topologiques et nous considérons dorénavant que V et W sont des $\mathbb{K}$-modules topologiques, tels que $U \subset V$ soit ouvert, et que l'application $f : U \to W$ soit continue. La classe des applications continues sera notée $\mathcal{C}^0$. Nous allons présenter deux concepts de calcul différentiel, appelés *cubique* et *simplicial*.

3.1 Calcul différentiel cubique

Définition 3.1.1 (Différentiabilité cubique)**.** *Nous disons qu'une application $f : U \to W$ est* de classe $\mathcal{C}^{[1]}_{\mathbb{K}}$ *(ou simplement $\mathcal{C}^{[1]}$ si l'anneau de base $\mathbb{K}$ est clairement déterminé d'après le contexte) s'il existe un prolongement continu $f^{[1]} : U^{[1]} \to W$ de l'application de quotient de différence du premier ordre, c'est-à-dire si, pour tout (x, v, t) dans $U^{]1[}$, nous avons $f^{[1]}(x, v, t) = \dfrac{f(x + tv) - f(x)}{t}$. L'*application tangente étendue *est alors définie par*

$$\mathrm{T}^{[1]}f : U^{[1]} \to W^{[1]}, \quad (x, v, t) \mapsto \mathrm{T}^{[1]}f(x, v, t) := (f(x), f^{[1]}(x, v, t), t) =: \mathrm{T}^{[1]}_{(t)}f(x, v).$$

Pour tout entier $k \geq 1$, les classes $\mathcal{C}^{[k]}_{\mathbb{K}}$ (ou simplement $\mathcal{C}^{[k]}$) sont définies par récurrence : nous disons qu'une application f est de classe $\mathcal{C}^{[k+1]}$ *si elle est de classe $\mathcal{C}^{[k]}$ et si l'application $f^{[k]} : U^{[k]} \to W$ est de classe $\mathcal{C}^{[1]}$, où nous avons posé $f^{[k]} := (f^{[k-1]})^{[1]}$. Les* applications tangentes étendues d'ordre supérieur *sont définies par* $\mathrm{T}^{[k+1]}f := \mathrm{T}^{[1]}(\mathrm{T}^{[k]}f)$.

La topologie permet de donner un sens à la condition de prolongement, et l'hypothèse de densité du groupe unité $\mathbb{K}^\times$ dans $\mathbb{K}$ garantit que l'application $f^{[1]}$ est unique si elle existe, de même que, pour tout x dans U, la valeur

$$df(x)v := f^{[1]}(x, v, 0) =: \partial_v f(x).$$

Les *différentielles cubiques d'ordre k*, en un point x de U, sont définies par

$$d^k f(x) : V^k \to W, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto \partial_{v_1} \dots \partial_{v_k} f(x).$$

Lemme 3.1.2 (Lemme de Schwarz)**.** *Si $f : U \to W$ est une application de classe $\mathcal{C}^{[2]}$, alors, pour tous vecteurs v et w dans V, nous avons*

$$\partial_v \partial_w f = \partial_w \partial_v f.$$

Démonstration. (voir le lemme 4.6 de [Bertram, Glöckner, Neeb 2004])
Pour tous s et t dans $\mathbb{K}^\times$, nous avons

$$\begin{aligned} &\left(f^{[1]}(\cdot, w, t)\right)^{[1]}(x, v, s) \\ &\qquad = \frac{f^{[1]}(x + sv, w, t) - f^{[1]}(x, w, t)}{s} \\ &\qquad = \frac{f(x + sv + tw) - f(x + sv) - f(x + tw) + f(x)}{st}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour tous s et t dans $\mathbb{K}^\times$,

$$\left(f^{[1]}(\cdot, w, t)\right)^{[1]}(x, v, s) = \left(f^{[1]}(\cdot, v, s)\right)^{[1]}(x, w, t).$$

Ces deux applications sont continues et coïncident sur $\mathbb{K}^\times$. Par densité de $\mathbb{K}^\times$ dans $\mathbb{K}$, ce résultat est encore vrai pour $s = t = 0$ et on obtient alors

$$\partial_v \partial_w f(x) = \left(f^{[1]}(\cdot, w, 0)\right)^{[1]}(x, v, 0) = \left(f^{[1]}(\cdot, v, 0)\right)^{[1]}(x, w, 0) = \partial_w \partial_v f(x).$$

□

Remarque 3.1.3. Le principe de la démonstration est extrêmement général. Il s'agit de montrer qu'une propriété est vérifiée dans le cas le plus singulier, c'est-à-dire pour des variables de temps nulles. Pour cela, nous montrons la propriété dans le cas non singulier, puis nous étendons ce résultat par continuité aux valeurs singulières, et ce, de manière unique, car $\mathbb{K}^\times$ est dense dans $\mathbb{K}$, et enfin nous spécialisons le résultat aux éléments les plus singuliers. Il s'agit de l'un des points forts de cette approche : nous travaillons de manière algébrique donc simple, ou en tout cas élémentaire, et nous obtenons directement le résultat de manière topologique. Notez que parfois le résultat prouvé dans le cas non singulier est exactement le même que le résultat recherché dans le cas le plus singulier, comme dans le cas du lemme de Schwarz, mais parfois nous prouvons une propriété générale qui se contracte pour des valeurs singulières en la propriété recherchée. Ce sera notamment le cas dans la preuve de la linéarité de la différentielle ci-dessous.

Théorème 3.1.4. *Soient $f : U \to W$ et $g : U' \to W'$ deux applications de classe $\mathcal{C}^{[k]}$ telles que $f(U) \subset U'$. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout entier naturel k.*

i) Fonctorialité : $\mathrm{T}^{[k]}(g \circ f) = \mathrm{T}^{[k]} g \circ \mathrm{T}^{[k]} f$ *et* $\mathrm{T}^{[k]}\mathrm{id}_U = \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{[k]}U}$.

ii) Homogénéité : pour tout r dans $\mathbb{K}^\times$, $\mathrm{T}^{[k]} f \circ \rho_{[k]}(r) = \rho_{[k]}(r) \circ \mathrm{T}^{[k]} f$.

iii) Linéarité : la différentielle $df(x) : V \to W$ est $\mathbb{K}$-linéaire et continue.

iv) Symétrie : la différentielle cubique $d^k f(x) : V^k \to W$ d'ordre k est $\mathbb{K}$-multilinéaire, symétrique et continue.

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont obtenus « par densité » à partir du théorème 2.2.2. L'homogénéité de la différentielle est un cas particulier du point (ii), et l'additivité est prouvée de manière analogue (voir [Bertram, Glöckner, Neeb 2004]) : pour tous x dans U, v et w dans V et t dans $\mathbb{K}^\times$, tels que $x+tv$, $x+tw$ et $x+tv+tw$ appartiennent à U, nous avons :

$$\begin{aligned} f^{[1]}(x, v+w, t) &= \frac{f(x+t(v+w)) - f(x)}{t} \\ &= \frac{f(x+tv+tw) - f(x+tv)}{t} + \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \\ &= f^{[1]}(x+tv, w, t) + f^{[1]}(x, v, t) \end{aligned}$$

Les deux membres extrémaux dépendent de manière continue de t et coïncident sur $\mathbb{K}^\times$ donc sur $\mathbb{K}$ par densité. En prenant $t=0$, nous obtenons

$$df(x)(v+w) = df(x)v + df(x)w.$$

Le point (iv) est une conséquence directe du point (iii) et du lemme de Schwarz. □

Notez qu'ici, l'application $f^{[1]}(x,\cdot,t) : V \to W$ n'est pas elle-même linéaire, mais la propriété vérifiée se contracte en une propriété de linéarité pour $t=0$.

La fonctorialité est équivalente à dire que, pour tout t dans $\mathbb{K}$ fixé, $\mathrm{T}^{[1]}_{(t)}$ est un foncteur covariant. Pour $t=0$, nous obtenons la règle de composition usuelle. De plus, pour tout t dans $\mathbb{K}$, le foncteur $\mathrm{T}^{[1]}_{(t)}$ commute avec les produits cartésiens. En effet, $\mathrm{T}^{[1]}_{(t)}(f\times g)$ est identifié de manière canonique avec $\mathrm{T}^{[1]}_{(t)}f \times \mathrm{T}^{[1]}_{(t)}g$. De manière analogue, pour toutes variables de temps $\boldsymbol{t}$ fixées, $\mathrm{T}^{[k]}_{(\boldsymbol{t})}$ est un foncteur covariant qui commute avec les produits cartésiens. En particulier, pour $\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$, $\mathrm{T}^{[k]}_{(\mathbf{0})}$ est un foncteur, appelé *foncteur tangent itéré k fois* et noté T^k. Notez que $\mathrm{T}^1 =: \mathrm{T}$ est le foncteur tangent usuel. Nous en déduisons que $\mathrm{T}^{[k]}\mathbb{K}$, $\mathrm{T}^{[k]}_{(\boldsymbol{t})}\mathbb{K}$ et $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$ sont des anneaux, de produits et additions obtenus en appliquant les foncteurs aux produit et addition dans $\mathbb{K}$. $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$ est appelé *anneau tangent itéré k fois*. Ce mécanisme est détaillé à la remarque 5.2.3. L'article [Bertram 2010] contient de nombreuses informations sur ces anneaux et donne en particulier un isomorphisme naturel d'anneaux

$$\mathrm{T}^k\mathbb{K} \cong \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_k]/(X_1^2,\ldots,X_k^2).$$

La proposition suivante décrit le comportement de la lissité vis-à-vis d'un changement d'anneaux de base admissibles.

Théorème 3.1.5. *Soit $\Phi : \mathbb{K}' \to \mathbb{K}$ un morphisme d'anneaux topologiques entre deux anneaux topologiques de base admissibles. Soient V et W deux $\mathbb{K}$-modules topologiques. Soit $f : U \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[\infty]}$ sur $\mathbb{K}$, définie sur un ouvert U de V. Alors f est une application de classe $\mathcal{C}^{[\infty]}$ sur $\mathbb{K}'$, pour les structures de $\mathbb{K}'$-module de V et W induites par Φ.*

Démonstration. Tout $\mathbb{K}$-module est un $\mathbb{K}'$-module par l'application $r.v := \Phi(r).v$. Pour tout entier i, et pour tout $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})$ dans $U^{]i[}$, nous avons :

$$F^{]i[,\mathbb{K}'}\left(\boldsymbol{u}, (t_\alpha)_{\emptyset\neq\alpha\subset\{1,\ldots,i\}}\right) = F^{]i[,\mathbb{K}}\left(\boldsymbol{u}, (\Phi(t_\alpha))_{\emptyset\neq\alpha\subset\{1,\ldots,i\}}\right).$$

Par conséquent, l'application $F^{]i[,\mathbb{K}'}$ admet une extension continue définie par :

$$F^{[i],\mathbb{K}'}\left(\boldsymbol{u},(t_\alpha)_{\emptyset\neq\alpha\subset\{1,\ldots,i\}}\right) := F^{[i],\mathbb{K}}\left(\boldsymbol{u},(\Phi(t_\alpha))_{\emptyset\neq\alpha\subset\{1,\ldots,i\}}\right),$$

car l'application Φ est continue et l'application F est de classe $\mathcal{C}^{[i]}$ sur $\mathbb{K}$. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^{[i]}$ sur $\mathbb{K}'$ pour tout entier i, donc de classe $\mathcal{C}^{[\infty]}$ sur $\mathbb{K}'$. □

La lissité de f par rapport à $\mathbb{K}'$ peut ainsi s'interpréter comme la restriction à l'anneau $\Phi(\mathbb{K}') \subset \mathbb{K}$ de la lissité de f par rapport à $\mathbb{K}$.

3.2 Calcul différentiel simplicial

Après les notions de classe $\mathcal{C}^k$ au sens cubique, nous définissons les notions de classe $\mathcal{C}^k$ au sens simplicial.

Définition 3.2.1 (Différentiabilité simpliciale)**.** *Une application continue $f : U \to W$ est dite* de classe $\mathcal{C}^{\langle k\rangle}_{\mathbb{K}}$, *ou simplement* de classe $\mathcal{C}^{\langle k\rangle}$, *si, pour tout entier $1 \leq \ell \leq k$, il existe des prolongements continus $f^{\langle\ell\rangle} : U^{\langle\ell\rangle} \to W$ des applications $f^{\rangle\ell\langle}$. Notez que, par densité du groupe unité $\mathbb{K}^\times$ dans $\mathbb{K}$, le prolongement $f^{\langle\ell\rangle}$ est unique, s'il existe. En particulier la valeur $f^{\langle\ell\rangle}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{0})$, appelée* différentielle simpliciale d'ordre ℓ, *est déterminée de manière unique. Nous définissons également le* jet étendu d'ordre k

$$\mathrm{J}^{\langle k\rangle}f : U^{\langle k\rangle} \to W^{\langle k\rangle}, \quad (\boldsymbol{v};\boldsymbol{s}) \mapsto \left(f(v_0), f^{\langle 1\rangle}(v_0,v_1;s_1),\ldots,f^{\langle k\rangle}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{s});\boldsymbol{s}\right),$$

*et, pour des variables de temps $\boldsymbol{s}$ dans $\mathbb{K}^{k+1}$ fixées, nous définissons la $\boldsymbol{s}$-*extension simpliciale de f *par*

$$\mathrm{J}^{\langle k\rangle}_{(\boldsymbol{s})}f : \mathrm{J}^{\langle k\rangle}_{(\boldsymbol{s})}U \to W^{k+1}, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \mathrm{J}^{\langle k\rangle}f(\boldsymbol{v};\boldsymbol{s}),$$

où $\mathrm{J}^{\langle k\rangle}_{(\boldsymbol{s})}U := \left\{\boldsymbol{v}\in V^{k+1} \,|\, (\boldsymbol{v};\boldsymbol{s})\in U^{\langle k\rangle}\right\}$. Le k-jet simplicial de f *est défini par*

$$\mathrm{J}^k f := \mathrm{J}^{\langle k\rangle}_{(\boldsymbol{0})}f : \mathrm{J}^kU \to \mathrm{J}^kW, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \mathrm{J}^kf(\boldsymbol{v}) = \left(f^{\langle\ell\rangle}(v_0,\ldots,v_\ell;\boldsymbol{0})\right)_{\ell=0,\ldots,k},$$

où nous posons $f^{\langle 0\rangle} := f$ par convention.

Le k-jet simplicial d'une application est donc la donnée de ses différentielles simpliciales jusqu'à l'ordre k.

Nous obtenons un théorème analogue à celui obtenu dans le cas cubique.

Théorème 3.2.2. *Soient $f : U \to W$ et $g : U' \to W'$ deux applications de classe $\mathcal{C}^{\langle k\rangle}$ telles que $f(U) \subset U'$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*

i) Fonctorialité : $\mathrm{J}^{\langle k\rangle}(g\circ f) = \mathrm{J}^{\langle k\rangle}g \circ \mathrm{J}^{\langle k\rangle}f$ et $\mathrm{J}^{\langle k\rangle}\mathrm{id}_U = \mathrm{id}_{\mathrm{J}^{\langle k\rangle}U}$.

ii) Homogénéité : pour tout r dans $\mathbb{K}^\times$, $\mathrm{J}^{\langle k\rangle}f \circ \rho_{\langle k\rangle}(r) = \rho_{\langle k\rangle}(r) \circ \mathrm{J}^{\langle k\rangle}f$.

Ce théorème est obtenu par densité à partir du théorème 2.3.1. Comme dans le cas cubique, pour des variables de temps $\boldsymbol{s}$ dans $\mathbb{K}^k$ fixées, $\mathrm{J}^{\langle k\rangle}_{(\boldsymbol{s})}$ est un foncteur covariant qui commute avec les produits cartésiens. Il s'ensuit que $\mathrm{J}^{\langle k\rangle}\mathbb{K}$, $\mathrm{J}^{\langle k\rangle}_{(\boldsymbol{t})}\mathbb{K}$ et $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ sont des anneaux. L'anneau $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ est appelé *anneau des jets d'ordre k*. À nouveau, nous renvoyons à l'article [Bertram 2010] pour plus d'informations sur ces anneaux. En particulier, pour $\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$, $\mathrm{J}^{\langle k \rangle}_{(\mathbf{0})}$ est un foncteur appelé *foncteur de jet d'ordre k*, noté J^k. Notez que $\mathrm{J}^1 = \mathrm{T}^1$ est le foncteur tangent usuel, et, pour $\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$, la fonctorialité implique l'équation (1.2.1). D'après le théorème 1.7 et le corollaire 1.11 de l'article [Bertram 2010], il existe une caractérisation équivalente de la classe $\mathcal{C}^{\langle k \rangle}$ en termes de développement limité, qui a l'avantage qu'aucun dénominateur n'apparaît.

Théorème 3.2.3. *Une application continue $f : U \to W$ est de classe $\mathcal{C}^{\langle k \rangle}$ si et seulement si les* développements limités simpliciaux *sont vérifiés, c'est-à-dire qu'il existe, pour tout entier $1 \leq \ell \leq k$, des applications continues $f^{\langle \ell \rangle} : U^{\langle \ell \rangle} \to W$ telles que, pour tout élément $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s})$ de $U^{\langle \ell \rangle}$,*

$$\begin{aligned}
f\left(v_0 + (s_1 - s_0)v_1\right) &= f(v_0) + (s_1 - s_0) f^{\langle 1 \rangle}(v_0, v_1; s_1), \\
f\left(v_0 + (s_2 - s_0)(v_1 + (s_2 - s_1)v_2)\right) &= f(v_0) + (s_2 - s_0) f^{\langle 1 \rangle}(v_0, v_1; s_1) \\
&\quad + (s_2 - s_1)(s_2 - s_0) f^{\langle 2 \rangle}(v_0, v_1, v_2; s_1, s_2), \\
&\vdots \\
f\left(v_0 + \sum_{j=1}^{k} \prod_{\ell=0}^{j-1} (s_k - s_\ell) v_j\right) &= f(v_0) + \sum_{j=1}^{k} \prod_{\ell=0}^{j-1} (s_k - s_\ell) f^{\langle j \rangle}(v_0, \ldots, v_j; s_1, \ldots, s_j).
\end{aligned}$$

Les applications $f^{\langle \ell \rangle}$ définies par ces conditions coïncident avec celles définies ci-dessus.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. Le calcul peut être vu comme une version multi-variable de la preuve du développement de Taylor énoncé au théorème 5.1 de l'article [Bertram, Glöckner, Neeb 2004], consistant à appliquer plusieurs fois la relation

$$f(x + tv) = f(x) + t f^{[1]}(x, v, t).$$

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{\langle k \rangle}$. Pour $k = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
f(v_0 + (s_1 - s_0)v_1) &= f(v_0) + (s_1 - s_0) f^{[1]}(v_0, v_1, s_1 - s_0) \\
&= f(v_0) + (s_1 - s_0) f^{\langle 1 \rangle}(v_0, v_1; s_1).
\end{aligned}$$

Pour $k = 2$, nous remplaçons dans l'équation précédente s_1 par s_2 et v_1 par $v_1 + (s_2 - s_1)v_2$,

$$\begin{aligned}
f\left(v_0 + (s_2 - s_0)(v_1 + (s_2 - s_1)v_2)\right) &= f(v_0) + (s_2 - s_0) f^{\langle 1 \rangle}(v_0, v_1 + (s_2 - s_1)v_2; s_2) \\
&= f(v_0) + (s_2 - s_0)\Big(f^{\langle 1 \rangle}(v_0, v_1; s_1) + \\
&\qquad (s_2 - s_1) f^{\langle 2 \rangle}(v_0, v_1, v_2; s_1, s_2)\Big),
\end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, nous avons utilisé la formule de récurrence du lemme 2.2.5 :

$$f^{\rangle 2 \langle}(v_0, v_1, v_2; s_1, s_2) = \frac{1}{s_1 - s_2}\left(f^{\rangle 1 \langle}(v_0, v_1; s_1) \quad - \; f^{\rangle 1 \langle}\left(v_0, v_1 + (s_2 - s_1)v_2; s_2\right)\right),$$

que nous multiplions par $(s_2 - s_1)$, et qui est encore valable pour les éléments singuliers, par continuité des applications et densité du groupe $\mathbb{K}^\times$ dans $\mathbb{K}$. Ainsi, nous avons bien

$$f^{\langle 1 \rangle}(v_0, v_1 + (s_2 - s_1)v_2; s_2) = f^{\langle 1 \rangle}(v_0, v_1; s_1) + (s_2 - s_1) f^{\langle 2 \rangle}(v_0, v_1, v_2; s_1, s_2).$$

Pour $k = 3$, nous remplaçons à nouveau s_2 par s_3 et v_2 par $v_2 + (s_3 - s_2)v_3$, et procédons de la même manière, et ainsi de suite.

Réciproquement, les arguments donnés dans la preuve directe du théorème 2.3.1 montrent que les applications continues $f^{\langle j \rangle}$ sont nécessairement déterminées par l'équation 2.3.2, c'est-à-dire qu'elles coïncident, pour des éléments $\boldsymbol{s}$ non singuliers, avec les quotients de différences simpliciaux et sont donc les prolongements continus des quotients de différences simpliciaux. □

3.3 La différentiabilité cubique implique la différentiabilité simpliciale

Théorème 3.3.1 (Cubique implique simplicial)**.** *Si une application $f : U \to W$ est de classe $\mathcal{C}^{[k]}$, alors elle est de classe $\mathcal{C}^{\langle k \rangle}$, et le diagramme suivant commute :*

$$\mathrm{T}^{[k]} f \circ g_k = (-1)^k g_k \circ \mathrm{J}^{\langle k \rangle} f \ : \qquad \begin{array}{ccc} U^{\langle k \rangle} & \xrightarrow{\mathrm{J}^{\langle k \rangle} f} & W^{\langle k \rangle} \\ {\scriptstyle g_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-1)^k g_k} \\ U^{[k]} & \xrightarrow{\mathrm{T}^{[k]} f} & W^{[k]} \end{array} ,$$

où g_k est l'application définie au lemme 2.1.7.

Démonstration. Ce théorème est obtenu par densité à partir du théorème 2.2.4 (voir le théorème 1.6 de l'article [Bertram 2010]). □

Nous conjecturons également que *simplicial implique cubique*, c'est-à-dire que, *si f est une application de classe $\mathcal{C}^{\langle \infty \rangle}$, alors elle est également de classe $\mathcal{C}^{[\infty]}$*, mais cette conjecture n'est pas prouvée pour l'instant. Par conséquent, nous travaillerons toujours sous l'hypothèse $\mathcal{C}^{[\infty]}$ dans la suite. Sous cette hypothèse, nous montrerons que les polynômes de Taylor que nous définirons sont effectivement polynomiaux.

Corollaire 3.3.2. *Si f est une application de classe $\mathcal{C}^{[k]}$, alors l'application $f^{\langle j \rangle}$ est de classe $\mathcal{C}^{[k-j]}$, pour tout $j \leq k$.*

Démonstration. À l'aide de l'injection $g_j : U^{\langle j \rangle} \to U^{[j]}$, nous pouvons considérer l'application $f^{\langle j \rangle} : U^{\langle j \rangle} \to W$ comme une application partielle de l'application $f^{[j]} : U^{[j]} \to W$. Cette dernière est de classe $\mathcal{C}^{[k-j]}$, donc $f^{\langle j \rangle}$ est également de classe $\mathcal{C}^{[k-j]}$, et donc, d'après le théorème précédent, est de classe $\mathcal{C}^{\langle k-j \rangle}$. □

Chapitre 4

Développements et polynômes de Taylor

Les applications polynomiales sont parmi les applications les plus élémentaires qui soient. Lorsque nous construirons les foncteurs de Weil, dont nous rappelons qu'il s'agit de foncteurs d'extensions scalaires, nous serons amenés à considérer les extensions d'applications lisses. Or les applications polynomiales sont précisément les applications qui possèdent une extension scalaire algébrique canonique. Par conséquent, nous essayerons toujours de nous ramener à l'étude des applications polynomiales. Approcher à un certain ordre une application par un polynôme est exactement la démarche qui mène à la notion de polynômes de Taylor. Le contrôle sur l'approximation effectuée se fait à l'aide d'une condition sur le reste des développements limités de Taylor.

Nous allons montrer qu'il existe, dans notre cadre général, des notions de développements limités et de polynômes de Taylor, et ce, même en caractéristique positive, ce qui est assez surprenant. Nous montrerons que les polynômes de Taylor des applications lisses au sens cubique sont des applications lisses au sens cubique, et sont bel et bien polynomiales.

Nous reprenons les notations du chapitre précédent, et ce, pour toute la suite : $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif unitaire topologique dont le groupe unité est ouvert dense, V et W sont deux $\mathbb{K}$-modules topologiques et $f : U \to W$ est une application continue définie sur un ouvert $U \subset V$.

4.1 Développements limités radial et radial multi-variable

Commençons par introduire les notions de développements limités à une ou plusieurs variables.

Définition 4.1.1. *1. On dit que f admet un* développement limité radial d'ordre k *s'il existe des applications continues $a_i : U \times V \to W$, pour tout entier $1 \leq i \leq k$, et une application continue $R_k : U^{[1]} \to W$ telles que, pour tout (x, v, t) dans $U^{[1]}$,*

$$f(x + tv) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} t^i a_i(x, v) + t^k R_k(x, v, t)$$

et telles que la condition sur le reste *soit satisfaite :*

$$R_k(x, v, 0) = 0.$$

2. *On dit que f admet un* développement limité radial multi-variable d'ordre k *s'il existe des applications continues $b_i : U \times V^i \to W$, pour tout entier $1 \leq i \leq k$, et une application continue $S_k : U^{\langle k \rangle} \to W$ telles que, pour tout $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ dans V^k tel que $x + \sum_{i=1}^{k} t^i v_i$ appartienne à U, on ait*

$$f(x + tv_1 + t^2 v_2 + \ldots + t^k v_k) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} t^i b_i(x, v_1, \ldots, v_i) + t^k S_k(x, \boldsymbol{v}; 0, \ldots, 0, t)$$

et telles que la condition sur le reste *soit satisfaite :*

$$S_k(x, \boldsymbol{v}, \mathbf{0}) = 0.$$

En prenant $0 = v_2 = v_3 = \ldots = v_k$, la condition radiale multi-variable implique la condition radiale.

Le théorème suivant montre qu'une application lisse admet des développements limités radiaux et radiaux multi-variable à tout ordre et que de plus les coefficients sont uniques, égaux aux différentielles simpliciales et aux jets respectivement.

Théorème 4.1.2 (Existence et unicité des développements limités)**.** *Soit $f : U \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{\langle k \rangle}$. Alors f admet des développements limités radiaux et radiaux multi-variable à tout ordre $j \leq k$ De plus, de tels développements sont uniques, donnés par les coefficients*

$$b_i(x, v_1, \ldots, v_i) = f^{\langle i \rangle}(x, v_1, \ldots, v_i; \mathbf{0}),$$

du développement limité radial multi-variable, et les coefficients

$$a_i(x, v) = f^{\langle i \rangle}(x, v, \mathbf{0}; \mathbf{0}),$$

du développement limité radial à une variable.

Démonstration. L'existence est une conséquence du théorème 3.2.3, en y prenant

$$s_0 = s_1 = \ldots = s_{k-1} = 0 \quad \text{et} \quad s_k = t.$$

L'unicité est prouvée dans le lemme 5.2. de l'article [Bertram, Glöckner, Neeb 2004] de la manière suivante. Fixons t dans $\mathbb{K}^\times$. L'unicité de a_1 (ou de b_1) est obtenue en divisant par t l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{k} t^i a_i(x, v) + t^k R_k(x, v, t) = \sum_{i=1}^{k} t^i a_i'(x, v) + t^k R_k'(x, v, t).$$

Nous obtenons que, pour tout t dans $\mathbb{K}^\times$ tel que (x, v, t) appartienne à $U^{]1[}$,

$$a_1 + \sum_{i=2}^{k} t^{i-1} a_i(x, v) + t^{k-1} R_k(x, v, t) = a_1' + \sum_{i=2}^{k} t^{i-1} a_i'(x, v) + t^{k-1} R_k'(x, v, t).$$

Par densité du groupe unité $\mathbb{K}^\times$ dans $\mathbb{K}$, cette relation reste vraie pour tout t dans $\mathbb{K}$ tel que (x, v, t) appartienne à $U^{[1]}$. En particulier, pour $t = 0$, nous en déduisons que $a_1 = a_1'$. L'unicité de $a_2, \ldots, a_k$ est ensuite obtenue par récurrence triviale. $\square$

4.2 Polynômes de Taylor

Maintenant que nous avons défini les développements limités, il semble naturel de considérer la somme de leurs coefficients, ce qui permet de définir les polynômes de Taylor, dont il faudra démontrer la polynomialité car c'est par des applications polynomiales que nous souhaitons approcher les applications lisses.

Théorème 4.2.1. *Soit $f : U \subset V \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[2k]}$. Alors, pour tout entier $1 \leq i \leq k$, la* différentielle normalisée d'ordre i

$$a_i(x, \cdot) : V \to W, \quad v \mapsto D_v^i f(x) := a_i(x, v) = f^{\langle i \rangle}(x, v, \mathbf{0}; \mathbf{0})$$

est continue et polynomiale (au sens de la définition A.2.1), homogène de degré i, et donc lisse au sens cubique.

Démonstration. Voir le corollaire 1.8 de l'article [Bertram 2010]. L'idée est la suivante : d'après l'unicité de développement de Taylor radial, nous avons clairement $a_i(x, tv) = t^i a_i(x, v)$ pour tout t dans $\mathbb{K}$, ce qui prouve l'homogénéité. De plus, $D_v^i f(x) := a_i(x, v)$ est une application partielle de $f^{\langle i \rangle}$, dont nous avons vu au corollaire 3.3.2 qu'elle est de classe $\mathcal{C}^{[2k-i]}$ donc de classe $\mathcal{C}^{[i]}$. Le résultat est une conséquence du lemme 5.5 de l'article [Bertram, Glöckner, Neeb 2004] qui énonce que toute application homogène de degré i et de classe $\mathcal{C}^{[2i]}$ est homogène polynomiale de degré i. La dernière assertion est une conséquence du théorème A.2.4. □

Si les entiers sont inversibles dans $\mathbb{K}$, alors nous avons $D_v^j f(x) = \dfrac{1}{j!} d^j f(x)(v, \ldots, v)$ (voir l'article [Bertram, Glöckner, Neeb 2004]). Notez bien que cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée et que nous ne pouvions donc pas définir les polynômes de Taylor à l'aide des quotients de différentielles successives par des entiers.

Notez que nous travaillons sous une hypothèse de lissité au sens cubique et nous ne savons pas si l'assertion reste vraie sous l'hypothèse simpliciale. Notez également que nous devons considérer une application de classe $\mathcal{C}^{2k}$, et non pas simplement $\mathcal{C}^k$ pour montrer la polynomialité de $a_k(x, \cdot)$. Ceci ne jouera pas de rôle dans la suite car nous considérerons toujours des applications lisses.

Le corollaire suivant permet de montrer que toute application homogène et lisse est polynomiale.

Corollaire 4.2.2. *Soit $f : U \to W$ une application, définie sur un voisinage ouvert de 0, homogène de degré k et de classe $\mathcal{C}^{[2k]}$. Alors l'application f est $\mathbb{K}$-polynomiale de degré k.*

Démonstration. L'homogénéité se traduit de la manière suivante : pour tout r dans $\mathbb{K}$ et pour tout x dans U, $f(rx) = r^k f(x)$. Écrivons le développement limité radial d'ordre k de f au point 0 :

$$f(rx) = \sum_{i=0}^{k} r^i f^{\langle i \rangle}(0, x, \mathbf{0}; \mathbf{0}) + r^k R_k(0, x, r),$$

où $R_k : U^{[1]} \to W$ est une application continue telle que $R_k(0, x, 0) = 0$. Par unicité du développement limité radial (théorème 4.1.2), nous obtenons $f(x) = f^{\langle k \rangle}(0, x, \mathbf{0}; \mathbf{0})$, qui est $\mathbb{K}$-polynomial d'après le théorème précédent. □

Nous pouvons désormais définir les polynômes de Taylor, qui sont au cœur de la construction des foncteurs de Weil.

Définition 4.2.3. *Soit $f : U \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[2k]}$ et soit x un point de U fixé. L'application*

$$\mathrm{Tay}_x^k f : V \to W, \quad v \mapsto \sum_{i=1}^{k} D_v^i f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i(x,v)$$

est appelée polynôme de Taylor d'ordre k de l'application f au point x.

Théorème 4.2.4. *Soit $f : U \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[2\ell]}$. Alors, pour tout entier k inférieur ou égal à ℓ, $\mathrm{Tay}_x^k f$ est une application lisse au sens cubique et polynomiale de degré au plus k, sans terme constant. Si de plus f est elle-même une application polynomiale de degré au plus k, alors $\mathrm{Tay}_0^k f$ coïncide avec f, à la constante près suivante :*

$$f = f(0) + \mathrm{Tay}_0^k f\,,$$

et la partie homogène f_i de f de degré i est égale à $a_i(0,\cdot) = f^{\langle i \rangle}(0,\cdot,\mathbf{0};\mathbf{0})$.

Démonstration. La lissité et la polynomialité de $\mathrm{Tay}_x^k f$ sont des conséquences du théorème4.2.1. Ensuite, supposons que f est une application polynomiale homogène de degré j avec $j \leq k$. Alors, nous avons $t^j f(v) = f(tv) = f(0) + \sum_{i=1}^{k} t^i f^{\langle i \rangle}(0,v,\mathbf{0};\mathbf{0})$. L'unicité du développement de Taylor radial (théorème 4.1.2) implique que, pour toute application homogène de degré j et de classe $\mathcal{C}^{[k]}$, nous avons $f(v) = f^{\langle j \rangle}(0,v,\mathbf{0};\mathbf{0})$, ce qui termine la preuve. □

Le développement de Taylor radial peut maintenant se reformuler de la manière suivante :

$$f(x+th) = f(x) + \mathrm{Tay}_x^k f(th) + t^k R_k(x,h,t)\,. \tag{4.2.1}$$

Si les entiers sont inversibles dans $\mathbb{K}$, alors, par unicité du développement, il coïncide avec le développement de Taylor usuel.

Chapitre 5

Jets simpliciaux

Nous allons définir les différentielles normalisées d'une application et montrer que les différentielles simpliciales d'une application s'expriment sous la forme d'une somme de ces différentielles normalisées. Nous donnerons ensuite une relation entre les jets simpliciaux et les polynômes de Taylor, qui sera essentielle pour comprendre la construction générale des foncteurs de Weil.

5.1 Différentielles normalisées et polynomialité

Définition 5.1.1. *Soit $f : U \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[k]}$. Nous définissons, pour tout multi-indice $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\mathbb{N}^k$ tel que $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \leq k$, et pour tous $\boldsymbol{v}$ dans V^k et x dans U, les* différentielles normalisées polynomiales

$$D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) := \left(D_{v_k}^{\alpha_k} \circ \ldots \circ D_{v_1}^{\alpha_1}\right) f(x),$$

qui sont bien définies d'après le corollaire 3.3.2.

Le résultat suivant est une généralisation « simpliciale » du lemme de Schwarz (théorème 3.1.4 (iv)).

Lemme 5.1.2. *Soit $f : U \subset V \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[k]}$. Alors, pour tout multi-indice $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\mathbb{N}^k$ tel que $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i \leq k$, et pour tout $\boldsymbol{v}$ dans V^k, l'application $D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f$ ne dépend pas de l'ordre de composition des différentielles normalisées $D_{v_i}^{\alpha_i}$.*

Démonstration. Nous allons prouver l'assertion par argument de continuité et de densité et commencer par la vérifier pour les éléments non singuliers à partir d'une formule explicite, ce qui rend les notations un peu lourdes, mais la preuve est alors directe.

$D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x)$ est obtenu, par restriction à $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$, à partir de l'application

$$D_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) := \left(D_{v_k,\boldsymbol{s}^{(k)}}^{\alpha_k} \circ \cdots \circ D_{v_1,\boldsymbol{s}^{(1)}}^{\alpha_1}\right) f(x),$$

où, pour tout entier $1 \leq i \leq k$, on pose $D_{v_i,\boldsymbol{s}^{(i)}}^{\alpha_i} := f^{\langle \alpha_i \rangle}(x, v_i, \boldsymbol{0}; \boldsymbol{s}^{(i)})$. Ainsi, $D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) = D_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x)$.

1. *À l'ordre 1.* D'après la définition du quotient de différences simplicial, nous obtenons, pour tout $\boldsymbol{s}^{(1)}$ non singulier :

$$D^{\alpha_1}_{v_1,\boldsymbol{s}^{(1)}} f(x) = \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \frac{f\left(x + \left(s^{(1)}_{j_1} - s^{(1)}_0\right) v_1\right)}{\prod\limits_{i=0,\ldots,\hat{j}_1,\ldots,\alpha_1} \left(s^{(1)}_{j_1} - s^{(1)}_i\right)}.$$

2. *À l'ordre 2.* Pour tout $\boldsymbol{s}^{(2)}$ non singulier, nous obtenons :

$$\left(D^{\alpha_2}_{v_2,\boldsymbol{s}^{(2)}} \circ D^{\alpha_1}_{v_1,\boldsymbol{s}^{(1)}}\right) f(x) = \sum_{j_2=0}^{\alpha_2} \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \frac{f\left(x + \left(s^{(1)}_{j_1} - s^{(1)}_0\right) v_1 + \left(s^{(2)}_{j_2} - s^{(2)}_0\right) v_2\right)}{\prod\limits_{i=0,\ldots,\hat{j}_1,\ldots,\alpha_1} \left(s^{(1)}_{j_1} - s^{(1)}_i\right) \prod\limits_{i=0,\ldots,\hat{j}_2,\ldots,\alpha_2} \left(s^{(2)}_{j_2} - s^{(2)}_i\right)}.$$

3. *À un ordre k quelconque.* Par récurrence, nous obtenons finalement, pour tous $\boldsymbol{s}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{s}^{(k)}$ non singuliers :

$$\left(D^{\alpha_k}_{v_k,\boldsymbol{s}^{(k)}} \circ \ldots \circ D^{\alpha_1}_{v_1,\boldsymbol{s}^{(1)}}\right) f(x) = \sum_{j_k=0}^{\alpha_k} \cdots \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \frac{f\left(x + \sum\limits_{\ell=1}^{k} \left(s^{(\ell)}_{j_\ell} - s^{(\ell)}_0\right) v_\ell\right)}{\prod\limits_{\ell=1}^{k} \prod\limits_{i=0,\ldots,\hat{j}_\ell,\ldots,\alpha_\ell} \left(s^{(\ell)}_{j_\ell} - s^{(\ell)}_i\right)}.$$

   Clairement, le membre de droite ne change pas si nous appliquons les opérateurs $D^{\alpha_i}_{v_i,\boldsymbol{s}^{(i)}}$ dans un ordre différent car les sommes commutent.

Finalement, par continuité et densité de $\mathbb{K}^\times$ dans $\mathbb{K}$, ceci est également vrai pour les valeurs singulières de $\boldsymbol{s}^{(i)}$, et en particulier pour $\boldsymbol{s}^{(i)} = \mathbf{0}$. $\square$

Le théorème suivant montre la polynomialité des différentielles normalisées et donne la structure des différentielles simpliciales.

Théorème 5.1.3. *Soit $f : U \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[2k]}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout x dans U et pour tout multi-indice $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\mathbb{N}^k$ tel que $|\boldsymbol{\alpha}| \leq k$, l'application*

$$V^k \to W, \quad \boldsymbol{v} \mapsto D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} f(x)$$

   est polynomiale multi-homogène de multi-degré $\boldsymbol{\alpha}$.

2. *L'application $\boldsymbol{v} \mapsto f^{\langle j \rangle}(x, \boldsymbol{v}; \mathbf{0})$ est polynomiale. Plus précisément, nous avons, pour tout entier $1 \leq j \leq k$,*

$$f^{\langle j \rangle}(x, \boldsymbol{v}; \mathbf{0}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^k, \sum_{i=1}^k i\alpha_i = j} D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} f(x) \ . \tag{5.1.1}$$

Démonstration. 1. L'application

$$V \mapsto W, \quad v_k \mapsto D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} f(x) = \left(D^{\alpha_k}_{v_k} \circ \ldots \circ D^{\alpha_1}_{v_1}\right) f(x) = D^{\alpha_k}_{v_k} \left(D^{\alpha_{k-1}}_{v_{k-1}} \circ \ldots \circ D^{\alpha_1}_{v_1} f\right)(x)$$

est polynomiale homogène de degré α_k, d'après le théorème 4.2.1. D'après le lemme précédent, la valeur de $D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x)$ est indépendante de l'ordre dans lequel on compose les différentielles normalisées. Par conséquent, l'application

$$V \to W, \quad v_i \mapsto D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x)$$

est également polynomiale homogène de degré α_i pour tout entier $1 \leq i \leq k$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{v} \mapsto D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x)$ est une application polynomiale multi-homogène de multi-degré $\boldsymbol{\alpha}$.

2. Nous allons utiliser les deux versions du développement de Taylor de f : radial et radial multi-variable. Puis nous les identifierons par unicité du développement limité.

   (a) Utilisons le développement limité radial d'ordre k, successivement pour chaque variable v_i, $1 \leq i \leq k$, ce qui est bien défini d'après le corollaire 3.3.2.

$$\begin{aligned} f\left(x + \sum_{i=1}^{k} t^i v_i\right) &= f\left(x + \sum_{i=2}^{k} t^i v_i + t^1 v_1\right) \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{k} t^{\alpha_1} D_{v_1}^{\alpha_1} f\left(x + \sum_{i=2}^{k} t^i v_i\right) + t^k R_k^1(x, v_1, t) \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{k} \sum_{\alpha_2=0}^{k-\alpha_1} t^{\alpha_1} t^{2\alpha_2} (D_{v_2}^{\alpha_2} \circ D_{v_1}^{\alpha_1}) f\left(x + \sum_{i=3}^{k} t^i\right) \\ &\quad + t^k R_k^1(x, v_1, t) + t^k R_k^2(x, v_1, v_2, t). \end{aligned}$$

   Par récurrence, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f\left(x + \sum_{i=1}^{k} t^i v_i\right) &= \sum_{0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_k \leq k, \sum_i \alpha_i \leq k} t^{\alpha_1} \ldots t^{k\alpha_k} \left(D_{v_k}^{\alpha_k} \circ \ldots \circ D_{v_1}^{\alpha_1}\right) f(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} t^k R_k^i(x, v_1, \ldots, v_i, t) \\ &= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^k, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} t^{\sum_i i\alpha_i} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) + t^k R_k(x, \boldsymbol{v}, t) \\ &= f(x) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^k, \sum_i i\alpha_i = j} t^j D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) + t^k R_k(x, \boldsymbol{v}, t), \end{aligned}$$

   où $R_k(x, \boldsymbol{v}, t) := \sum_{i=1}^{k} R_k^i(x, v_1, \ldots, v_i, t) + \sum_{j>k} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^k, \sum_i i\alpha_i = j} t^{j-k} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x)$ satisfait la condition sur le reste $R_k(x, \boldsymbol{v}, 0) = 0$.

   (b) Utilisons le développement limité radial multi-variable d'ordre k :

$$f\left(x + \sum_{i=1}^{k} t^i v_i\right) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} t^j f^{\langle j \rangle}(x, v_1, \ldots, v_j; \mathbf{0}) + t^k S_k(x, \boldsymbol{v}; 0, \ldots, 0, t).$$

La relation (5.1.1) est alors une conséquence de l'unicité de ce développement limité (théorème 4.1.2).

□

Remarque 5.1.4. Si les entiers sont inversibles dans $\mathbb{K}$, alors la relation (5.1.1) se reformule de la manière suivante :

$$f^{\langle j\rangle}(x, \boldsymbol{v}; \mathbf{0}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^k, \sum_i i\alpha_i = j} \frac{d^{|\boldsymbol{\alpha}|} f(x, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}})}{\boldsymbol{\alpha}!}, \tag{5.1.2}$$

où $\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \dots \alpha_k!$ et $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}} := (\underbrace{v_1, \dots, v_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{v_k, \dots, v_k}_{\alpha_k})$ (v_i apparaissant α_i fois). En effet, $D_{v_1}^{\alpha_1} f(x) = \dfrac{d^{\alpha_1} f(x)(v_1, \dots, v_1)}{\alpha_1!}$; en réitérant ceci et en utilisant le théorème 3.1.4, nous obtenons

$$\begin{aligned} D_{v_1,v_2}^{\alpha_1,\alpha_2} f(x) = \left(D_{v_2}^{\alpha_2} \circ D_{v_1}^{\alpha_1}\right) f(x) &= \frac{d^{\alpha_2}\left(\dfrac{d^{\alpha_1} f(\cdot)(v_1, \dots, v_1)}{\alpha_1!}\right)(x)(v_2, \dots, v_2)}{\alpha_2!} \\ &= \frac{d^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)(v_1, \dots, v_1, v_2, \dots, v_2)}{\alpha_1!\alpha_2!}. \end{aligned}$$

Par récurrence, nous obtenons $D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} f(x) = \dfrac{d^{|\boldsymbol{\alpha}|} f(x, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}})}{\boldsymbol{\alpha}!}$, ce qui prouve la relation (5.1.2). Notez que ces formules s'accordent avec les formules données au chapitre 8 du livre [Bertram 2008]. Cependant, les méthodes que nous avons utilisées ici sont beaucoup plus adaptées au cas de la caractéristique positive.

Donnons les formules explicites pour $j = 1, 2, 3$ et 4 pour avoir une idée plus concrète de la structure des différentielles simpliciales.

$$f^{\langle 1\rangle}(x, v_1; 0) = df(x, v_1).$$

Si 2 est inversible dans $\mathbb{K}$,

$$f^{\langle 2\rangle}(x, v_1, v_2; 0, 0) = \frac{d^2 f(x)(v_1, v_1)}{2} + df(x, v_2).$$

Si 2 et 3 sont inversibles dans $\mathbb{K}$,

$$f^{\langle 3\rangle}(x, v_1, v_2, v_3; 0, 0, 0) = \frac{d^3 f(x)(v_1, v_1, v_1)}{6} + d^2 f(x)(v_1, v_2) + df(x)v_3.$$

Si 2, 3 et 4 sont inversibles dans $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f^{\langle 4\rangle}(x, v_1, v_2, v_3, v_4; 0, 0, 0, 0) &= \frac{d^4 f(x)(v_1, v_1, v_1, v_1)}{24} + \frac{d^3 f(x)(v_1, v_1, v_2)}{2} \\ &\quad + d^2 f(x)(v_1, v_3) + \frac{d^2 f(x)(v_2, v_2)}{2} + df(x)v_4. \end{aligned}$$

5.2 Les jets simpliciaux en tant qu'extensions scalaires

Nous avons montré au chapitre 3 que $\mathrm{J}^{\langle k \rangle}_{(\boldsymbol{s})}$ et en particulier J^k sont des foncteurs (voir le théorème 3.2.2). Ils commutent avec les produits cartésiens, et, par conséquent, appliqués à l'anneau $(\mathbb{K}, +, m)$, muni du produit m et de l'addition a, donnent lieu à de nouveaux anneaux, notés $\mathrm{J}^{\langle k \rangle}_{(\boldsymbol{s})}\mathbb{K}$, resp. $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$. Ces anneaux ont été déterminés de manière explicite dans l'article [Bertram 2010] :

$$\mathrm{J}^{\langle k \rangle}_{(\boldsymbol{s})}\mathbb{K} \cong \mathbb{K}[X]/\left(X(X - s_1)\cdots(X - s_k)\right), \qquad \mathrm{J}^k\mathbb{K} \cong \mathbb{K}[X]/(X^{k+1}). \tag{5.2.1}$$

Notons δ la classe du polynôme X dans $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$, de sorte que $(1, \delta, \ldots, \delta^k)$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes peuvent être prouvées de manière conceptuelle, sans utiliser les isomorphismes donnés ci-dessus.

Lemme 5.2.1. *La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ est* $\mathbb{N}$-graduée *, c'est-à-dire, de la forme*

$$\mathrm{J}^k\mathbb{K} = E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_k \quad \text{avec} \quad E_j \cdot E_i \subset E_{i+j}.$$

En particulier, $E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ est une sous-algèbre nilpotente.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 3.2.2 : $\mathrm{J}^k m$ commute avec l'action canonique de $\mathbb{K}^\times$, ce qui prouve que $\mathbb{K}^\times$ agit par automorphismes d'anneaux. Par conséquent, les espaces propres $E_j = \{x \in \mathrm{J}^k\mathbb{K} \mid \forall r \in \mathbb{K}^\times, r.x = r^j x\}$ définissent une graduation de $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$. □

Cette action de $\mathbb{K}^\times$ est fondamentale et existe pour toutes les algèbres de Weil graduées.

La projection canonique

$$\pi^k : \mathrm{J}^k\mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad [P(X)] \mapsto P(0)$$

est un morphisme d'anneaux admettant une section

$$\sigma^k : \mathbb{K} \to \mathrm{J}^k\mathbb{K}, \quad t \mapsto [t \cdot 1]$$

(classe des polynômes constants), appelée l'*injection canonique* ou *section nulle canonique.* On note

$$\mathrm{J}^k_0\mathbb{K} = \langle \delta, \ldots, \delta^k \rangle$$

le noyau de π^k, c'est-à-dire la fibre de $\pi^k : \mathrm{J}^k\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ au-dessus de 0. Notez que $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ est à nouveau un anneau topologique dans lequel le groupe unité est dense, ce qui permet de donner un sens à la notion d'applications lisses, ou de classe $\mathcal{C}^{[k]}$, sur cet anneau. Ceci est une propriété générale des $\mathbb{K}$-algèbres de Weil.

Théorème 5.2.2 (Théorème d'extension scalaire simpliciale)**.** *Si une application $f : U \to W$ est lisse sur $\mathbb{K}$, alors elle admet une unique extension $F : \mathrm{J}^kU \to \mathrm{J}^kW$ lisse sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$, c'est-à-dire qu'il existe une unique application $F : \mathrm{J}^kU \to \mathrm{J}^kW$ (à savoir $F = \mathrm{J}^kf$) telle que*

1. *F soit lisse sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$,*

2. $F(x) = f(x)$ pour tout x dans U, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute

$$F \circ \sigma_U = \sigma_W \circ f : \quad \begin{tikzcd} \mathrm{J}^k U \arrow[r, "F"] & \mathrm{J}^k W \\ U \arrow[u, "\sigma_U"] \arrow[r, "f"'] & W \arrow[u, "\sigma_W"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\sigma_U : U \to \mathrm{J}^k U$ et $\sigma_W : W \to \mathrm{J}^k W$ sont les injections canoniques.

Plus précisément, toute application $F : \mathrm{J}^k U \to \mathrm{J}^k W$ lisse sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ est déterminée de manière unique par sa restriction sur la base $\sigma_U(U) \subset \mathrm{J}^k U$.

Démonstration. 1. *Existence.* Nous allons prouver que l'application $\mathrm{J}^k f$ est lisse sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$. En fait, tous les arguments utilisés dans la preuve du théorème 6.2 de [Bertram 2008] (voir également les théorèmes 2.6 et 2.7 de [Bertram 2010]) s'appliquent : $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ est à nouveau un anneau. Les conditions définissant la classe $\mathcal{C}^{[1]}$ sur $\mathbb{K}$ peuvent être définies à l'aide d'un diagramme commutatif faisant intervenir des produits cartésiens. En effet, considérons l'identité définissante de la classe $\mathcal{C}^{[1]}$ sur $\mathbb{K}$:

$$t \cdot f^{[1]}(x, v, t) = f(x + tv) - f(x)$$

et écrivons-la sous la forme d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U^{]1[} \arrow[r] \arrow[d] & U^{]1[} \times U \arrow[r] & U \times U \arrow[d] \\ \mathbb{K} \times U^{]1[} \arrow[d] & & W \times W \arrow[d] \\ \mathbb{K} \times W \arrow[r] & W \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

défini par

$$\begin{tikzcd} (x, v, t) \arrow[r] \arrow[d] & ((x, v, t), x) \arrow[r] & (x + tv, x) \arrow[d] \\ (t, x, v, t) \arrow[d] & & (f(x + tv), f(x)) \arrow[d] \\ (t, f^{]1[}(x, v, t)) \arrow[r] & t f^{]1[}(x, v, t) \arrow[r] & f(x + tv) - f(x) \end{tikzcd}$$

Par conséquent, en appliquant le foncteur J^k qui préserve les produits cartésiens, nous obtenons un diagramme similaire sur l'anneau $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$, où toutes les applications sont remplacées par leurs k-jets simpliciaux. Nous obtenons ainsi

$$(\mathrm{J}^k f)^{]1[, \mathrm{J}^k\mathbb{K}} = \mathrm{J}^k(f^{]1[, \mathbb{K}}).$$

Comme $f^{[1]}$ est lisse sur $\mathbb{K}$, $\mathrm{J}^k\left(f^{[1], \mathbb{K}}\right)$ est continue d'après les étapes précédentes de la preuve, et donc $(\mathrm{J}^k f)^{]1[, \mathrm{J}^k\mathbb{K}}$ admet une extension continue $(\mathrm{J}^k f)^{[1], \mathrm{J}^k\mathbb{K}} := \mathrm{J}^k\left(f^{[1], \mathbb{K}}\right)$, ce qui prouve que l'application $\mathrm{J}^k f$ est de classe $\mathcal{C}^{[1]}$ sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$. Par récurrence, l'application $\mathrm{J}^k f$ est alors de classe $\mathcal{C}^{[\infty]}$ sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$.

2. *Unicité.* L'unicité est une conséquence du théorème 5.1.3 : pour F comme dans l'énoncé du théorème, nous allons établir une formule explicite en termes de ses valeurs sur la base $\sigma_U(U)$. Soit $z = (x, v_1, \dots, v_k) = x + \delta v_1 + \ldots + \delta^k v_k$ un élément de $\mathrm{J}^k U$, avec x dans U et v_i dans V. Comme F est lisse sur l'anneau $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$, nous pouvons choisir $t = \delta$ et utiliser le développement limité radial de F (voir la preuve du théorème 5.1.3) à l'ordre $k+1$ et nous obtenons

$$F\left(x + \sum_{i=1}^{k} \delta^i v_i\right) = F(x) + \sum_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^k} \delta^{\sum_{i=1}^{k} i\alpha_i} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} F(x), \tag{5.2.2}$$

où, contrairement au théorème 5.1.3, aucun reste n'apparaît car $\delta^{k+1} = 0$.

La preuve du lemme 5.1.2 montre immédiatement que $D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} F(x)$ est entièrement déterminé par les valeurs sur sa base, c'est-à-dire que si $F(x) = 0$ pour tout x dans U, alors $D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} F(x) = 0$. Pour des valeurs non singulières de $\boldsymbol{s}^{(i)}$, $1 \leq i \leq k$, nous pouvons le voir directement sur l'application $D_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}}^{\boldsymbol{\alpha}} F(x)$, où nous prenons tous les éléments $\boldsymbol{s}^{(i)}$ dans $\mathbb{K}^{\alpha_i}$, puisque les différences divisées simpliciales s'expriment en fonction des valeurs de F aux points $x + \sum_{i=1}^{k} \left(s_{j_i}^{(i)} - s_0^{(i)}\right) v_i \in U$. Par densité, nous obtenons également l'unicité pour les valeurs singulières de $\boldsymbol{s}$.

□

Remarque 5.2.3. Notez que le schéma de la preuve de l'existence est très général : nous avons des propriétés qui peuvent être définies par un diagramme commutatif (classe $\mathcal{C}^1$, commutativité, associativité d'une loi). Nous appliquons alors le foncteur à ce diagramme et nous obtenons un nouveau diagramme qui traduit ces mêmes propriétés. Le point crucial pour pouvoir utiliser cette méthode est que le foncteur en question doit préserver les produits cartésiens.

Le théorème précédent se généralise pour toute $\mathbb{K}$-algèbre de Weil, comme nous le verrons par la suite.

Corollaire 5.2.4. *Soient $P, Q : V \to W$ des applications polynomiales lisses sur $\mathbb{K}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$\mathrm{J}^k P : \mathrm{J}^k V \to \mathrm{J}^k W$ est également lisse sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$, $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$-polynomial, et coïncide avec l'extension scalaire algébrique (voir l'annexe A, définition A.3.1) $P_{\mathrm{J}^k\mathbb{K}}$ de P de $\mathbb{K}$ à $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$.*
2. *La restriction $\mathrm{J}_0^k P$ de $\mathrm{J}^k P$ à la fibre $\mathrm{J}_0^k V = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{J}_0^k\mathbb{K}$ au-dessus de 0 est à nouveau une application polynomiale, et coïncide avec l'extension scalaire algébrique P de $\mathbb{K}$ à l'anneau (non-unitaire) $\mathrm{J}_0^k\mathbb{K}$.*
3. *Supposons que $P(0) = Q(0)$. Alors $\mathrm{J}_0^k P = \mathrm{J}_0^k Q$ si et seulement si $P \equiv Q \mod (\deg > k)$, c'est-à-dire, P et Q coïncident, aux termes de degré strictement supérieur à k près.*

Démonstration. 1. L'extension $P_{\mathrm{J}^k\mathbb{K}}$ de P de $\mathbb{K}$ à $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ est lisse sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$, $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$-polynomiale et satisfait à la condition d'extension suivante :

$$P_{\mathrm{J}^k\mathbb{K}} \circ \sigma_U = \sigma_W \circ P$$

(voir le théorème A.3.2, avec $\mathbb{A} = \mathrm{J}^k\mathbb{K}$). D'après le théorème précédent, l'application $\mathrm{J}^k P$, lisse sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$, coïncide avec $P_{\mathrm{J}^k\mathbb{K}}$, et donc est $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$-polynomiale.

2. La preuve est analogue à celle du 1).
3. C'est une conséquence de 2) puisque l'extension scalaire algébrique d'un polynôme sans terme constant P de $\mathbb{K}$ à $\mathrm{J}_0^k\mathbb{K}$ est nulle si et seulement si P ne contient aucun terme homogène de degré $1 \leq j \leq k$.

$\square$

5.3 Lien entre les polynômes de Taylor et les jets simpliciaux

D'après le théorème 5.1.3, l'application $\mathrm{J}^k f(x, \boldsymbol{v})$ est polynomiale en $\boldsymbol{v}$. Nous allons montrer qu'elle peut être vue comme l'extension scalaire du polynôme de Taylor $\mathrm{Tay}_x^k f$.

Le théorème suivant montre que les concepts de jets et de polynômes de Taylor sont équivalents dans une carte, mais se comportent différemment vis-à-vis de la composition.

Théorème 5.3.1 (Extension scalaire du polynôme de Taylor)**.** *Soient $f, g : U \to W$ et $h : U' \to W'$ des applications de classe $\mathcal{C}^{[2k]}$ telles que $f(x) = g(x)$ et $h(U') \subset U$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\mathrm{Tay}_x^k f = \mathrm{Tay}_x^k g \Leftrightarrow \mathrm{J}_x^k f = \mathrm{J}_x^k g$.
2. *L'application polynomiale $\mathrm{J}_x^k f$ est l'extension scalaire du polynôme de Taylor $\mathrm{Tay}_x^k f$, de $\mathbb{K}$ à la partie nilpotente $\mathrm{J}_0^k\mathbb{K} = \delta\mathbb{K} \oplus \ldots \oplus \delta^k\mathbb{K}$ de l'anneau $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$:*
$$\mathrm{J}_x^k f = \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\mathrm{J}_0^k\mathbb{K}} .$$
3. *La règle de composition de polynômes de Taylor est la suivante :*
$$\mathrm{Tay}_x^k(g \circ h) = \left[\mathrm{Tay}_{h(x)}^k g \circ \mathrm{Tay}_x^k h\right] \mod (\deg > k),$$
où $\mod (\deg > k)$ *désigne la composition tronquée à l'ordre k des polynômes.*

Démonstration. 1. $\Leftarrow$: Supposons que $\mathrm{J}_x^k f = \mathrm{J}_x^k g$, alors
$$\mathrm{Tay}_x^k f(v) = \sum_{i=1}^{k} f^{\langle i \rangle}(x, v, \mathbf{0}; \mathbf{0}) = \alpha \circ \mathrm{J}_x^k f(v, \mathbf{0}) = \alpha \circ \mathrm{J}_x^k f \circ \kappa(v)$$
où
$$\alpha : \mathrm{J}_0^k W = W^k \to W, \quad (w_1, \ldots, w_k) \mapsto w_1 + \ldots + w_k$$
et
$$\kappa : V \to \mathrm{J}_0^k V, \quad v \mapsto (v, \mathbf{0}) .$$
Ainsi, $\mathrm{J}_x^k f = \mathrm{J}_x^k g$ implique $\mathrm{Tay}_x^k f = \mathrm{Tay}_x^k g$.

$\Rightarrow$: Supposons que $\mathrm{Tay}_x^k f = \mathrm{Tay}_x^k g$, alors, pour $\phi := f - g$ nous avons $\phi(x) = 0$ et $\mathrm{Tay}_x^k \phi = 0$, c'est-à-dire,
$$\forall j = 1, \ldots, k, \forall v \in V : \quad \phi^{\langle j \rangle}(x, v, \mathbf{0}; \mathbf{0}) = 0.$$
Afin de prouver que $\mathrm{J}_x^k \phi = 0$, nous devons montrer que $\phi^{\langle j \rangle}(v_0, \ldots, v_j; \mathbf{0}) = 0$, pour tout $\boldsymbol{v}$ dans $\mathrm{J}^k U$. Nous allons le prouver en calculant $\phi(x + tv_1 + t^2 v_2 + \ldots + t^k v_k)$ de deux manières différentes : en utilisant d'une part la développement limité radial et d'autre

part le développement limité radial multi-variable. Soit $w := v_1 + tv_2 + \ldots + t^{k-1}v_k$. Comme $\phi(x)$ et $\mathrm{Tay}_x^k\phi$ sont nuls, nous obtenons

$$\begin{aligned}\phi(x+tw) &= \sum_{j=0}^{k} t^j \phi^{\langle j\rangle}(x,w,\mathbf{0};\mathbf{0}) + t^k\left(\phi^{\langle k\rangle}(x,w,\mathbf{0};\mathbf{0},t) - \phi^{\langle k\rangle}(x,w,\mathbf{0};\mathbf{0})\right)\\ &= t^k\left(\phi^{\langle k\rangle}(x,w,\mathbf{0};\mathbf{0},t) - \phi^{\langle k\rangle}(x,w,\mathbf{0};\mathbf{0})\right).\end{aligned}$$

D'autre part, le développement limité multi-variable donne, avec $x =: v_0$,

$$\phi(v_0 + tv_1 + \ldots + t^k v_k) = \sum_{j=0}^{k} t^j \phi^{\langle j\rangle}(v_0,\ldots,v_j;\mathbf{0}) + t^k(\phi^{\langle k\rangle}(\boldsymbol{v};\mathbf{0},t) - \phi^{\langle k\rangle}(\boldsymbol{v};\mathbf{0})).$$

Par unicité du développement limité radial, nous obtenons $\phi^{\langle j\rangle}(v_0,\ldots,v_j;\mathbf{0}) = 0$ pour tout entier $1 \le j \le k$.

2. Choisissons l'origine de V telle que $x = 0$. Soit $f : U \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[2k]}$. On pose $P := \mathrm{Tay}_0^k f$. D'après le théorème 4.2.4, P coïncide (à la constante additive $P(0) = 0$ près) avec son propre polynôme de Taylor, ce qui implique que $\mathrm{Tay}_0^k f = \mathrm{Tay}_0^k P$, et donc, d'après (i), $\mathrm{J}_0^k f = \mathrm{J}_0^k P$. Or ce dernier est $\mathrm{J}_0^k\mathbb{K}$-polynomial et coïncide avec son extension scalaire algébrique de $\mathbb{K}$ à $\mathrm{J}_0^k\mathbb{K}$ d'après le corollaire 5.2.4. Notez que les parties homogènes de degré strictement supérieur à k s'annulent, et donc $\mathrm{J}_x^k f$ est de degré au plus k.
3. Soient $R := \mathrm{Tay}_0^k(g\circ h)$, $P := \mathrm{Tay}_{h(0)}^k g$, $Q := \mathrm{Tay}_0^k h$. D'après (i), $\mathrm{J}_0^k h = \mathrm{J}_0^k Q$ et $\mathrm{J}_{h(0)}^k g = \mathrm{J}_{Q(0)}^k P$. En utilisant ceci et la fonctorialité de J^k, nous obtenons

$$\mathrm{J}_0^k R = \mathrm{J}_0^k(g\circ h) = \mathrm{J}_{h(0)}^k g \circ \mathrm{J}_0^k h = \mathrm{J}_{Q(0)}^k P \circ \mathrm{J}_0^k Q = \mathrm{J}_0^k(P\circ Q),$$

d'où, d'après le corollaire 5.2.4, $R \equiv P\circ Q \mod (\deg > k)$.

□

Notez que le k-jet $\mathrm{J}^k f$ de f est défini à l'aide d'une extension scalaire du polynôme de Taylor de $\mathbb{K}$ à l'anneau $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$. Cette construction se généralisera naturellement aux algèbres de Weil : les extensions des applications seront définies comme les extensions scalaires, de l'anneau de base à l'algèbre de Weil, du polynôme de Taylor de f.

Deuxième partie

Foncteurs de Weil

Chapitre 6

Algèbres de Weil

Dans ce chapitre purement algébrique, nous définissons la catégorie des algèbres de Weil dans notre cadre différentiel et nous donnons différentes constructions possibles de nouvelles algèbres de Weil à partir d'anciennes, notamment le *produit tensoriel* et la *somme de Whitney*. Ces constructions se traduisent par des constructions sur les fibrés de Weil associés.

Nous étudions également les *extensions* d'algèbres de Weil, qui sont représentées par des suites exactes d'algèbres.

Certaines algèbres de Weil possèdent une structure supplémentaire : les algèbres de Weil *graduées*, que nous étudions en détail et sur lesquelles nous montrons qu'il existe une structure de quasi-anneau qui présente des analogies avec la composition des séries formelles.

Nous présentons la structure des algèbres de Weil et montrons en particulier l'existence d'un drapeau canonique. Le drapeau canonique permettra d'associer à toute algèbre de Weil une suite d'extensions particulièrement simples : les *extensions vectorielles* qui sont les suites exactes d'algèbres dont le noyau est une algèbre de produit nul.

6.1 Les algèbres de Weil

Commençons par rappeler la définition des algèbres de Weil donnée dans l'introduction générale. Cette définition est analogue aux définitions d'algèbres de Weil sur un anneau commutatif unitaire dans les livres [Kock 1981] et [Lavendhomme 1987]. On donne ensuite les exemples les plus importants d'algèbres de Weil : les anneaux tangents itérés $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$ et les anneaux de jets $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$.

Définition 6.1.1. *Une* $\mathbb{K}$-algèbre de Weil *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre* $\mathbb{A}$ *commutative, associative, unitaire, de la forme* $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$*, où* $\mathring{\mathbb{A}}$ *est un idéal nilpotent. On suppose de plus que* $\mathring{\mathbb{A}}$ *est libre et de dimension finie sur* $\mathbb{K}$*. On munit* $\mathbb{A}$ *de la topologie produit sur* $\mathring{\mathbb{A}} \cong \mathbb{K}^n$ *relativement à une (et donc à toute)* $\mathbb{K}$*-base. On appelle* hauteur *d'une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil* $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ *l'entier* k *tel que* $\mathring{\mathbb{A}}$ *soit nilpotent d'ordre* $k+1$*.*

Rappelons tout d'abord que le groupe $\mathrm{Gl}(n+1, \mathbb{K})$ agit par homéomorphismes sur $\mathbb{K}^{n+1}$ (muni de la topologie produit), donc la topologie sur $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ est bien indépendante du choix d'une $\mathbb{K}$-base.

Contrairement au cas classique des $\mathbb{R}$-algèbres de Weil, l'idéal nilpotent $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ n'est pas toujours maximal puisque $\mathbb{K}$ lui-même peut contenir des éléments nilpotents non nuls.

Exemple 6.1.2. Les *anneaux tangents itérés*

$$\mathrm{T}^k\mathbb{K} \cong \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_k]/(X_1^2, \ldots, X_k^2) \cong \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,k\}} \varepsilon_I \, \mathbb{K}\,,$$

où tous les éléments ε_i sont des éléments nilpotents d'ordre 2 qui commutent entre eux, et où $\varepsilon_{\{i_1,\ldots,i_n\}} := \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_n}$, sont des $\mathbb{K}$-algèbres de Weil.

Exemple 6.1.3. Les *anneaux de jets*,

$$\mathrm{J}^k\mathbb{K} \cong \mathbb{K}[X]/(X^{k+1}) \cong \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \delta^j \mathbb{K}\,,$$

où δ est un élément nilpotent d'ordre $k+1$ (voir l'équation (5.2.1)) sont des $\mathbb{K}$-algèbres de Weil.

Plus généralement, les algèbres de polynômes tronqués à plusieurs variables suivantes sont des algèbres de Weil :

$$\mathbb{W}_n^k\mathbb{K} := \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]/I^{k+1},$$

où $I := \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ est l'idéal engendré par toutes les formes linéaires, ce qui fait de I^{k+1} l'idéal de tous les polynômes de degré plus grand que k. C'est effectivement une algèbre de Weil : en tant que $\mathbb{K}$-module, ce quotient est l'espace des polynômes de degré au plus k, à n variables, qui est libre. Pour $n = 1$, nous avons $\mathbb{W}_1^k\mathbb{K} = \mathrm{J}^k\mathbb{K}$, et en particulier, $\mathbb{W}_1^1 = \mathrm{T}\mathbb{K} = \mathrm{J}\mathbb{K}$. Si $\mathbb{A}$ est une algèbre de Weil de hauteur k, et si $(a_1, \ldots, a_n)$ est une $\mathbb{K}$-base de $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$, alors l'application

$$\mathbb{W}_n^k\mathbb{K} \to \mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}, \quad P \mapsto (P(\mathbf{0}), P(a_1, \ldots, a_n))$$

est bien définie et est un morphisme surjectif d'algèbres. Par conséquent, nous avons la proposition suivante, analogue à la proposition 1.1.3 donnée dans le cadre classique.

Proposition 6.1.4. *Toute algèbre de Weil est un quotient d'une algèbre* $\mathbb{W}_n^k\mathbb{K}$*, pour des entiers* k *et* n*.*

Si $\mathbb{K}$ est un corps, alors une telle représentation avec k et n minimaux est en un certain sens unique, avec $n = \dim\left(\overset{\circ}{\mathbb{A}}/\overset{\circ}{\mathbb{A}}{}^2\right)$ et avec k la hauteur de $\mathbb{A}$ (voir les sections 1.5-1.7 de l'article [Kolář 2008] dans le cas réel ; les arguments sont les mêmes pour tout corps général), mais si $\mathbb{K}$ n'est pas un corps, ce n'est plus vrai (par exemple, $\mathbb{K}$ lui-même peut être une algèbre de Weil sur un autre corps ou sur un autre anneau). Il va sans dire qu'une classification des algèbres de Weil est complètement hors de portée.

6.2 Le « groupe de Galois » d'une algèbre de Weil

Les algèbres de Weil forment une catégorie :

Définition 6.2.1. *Un* morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil *entre deux algèbres de Weil* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *est un morphisme continu de* $\mathbb{K}$*-algèbres* $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *qui préserve les idéaux nilpotents :* $\phi\left(\overset{\circ}{\mathbb{A}}\right) \subset \overset{\circ}{\mathbb{B}}$*, ce qui équivaut à dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi^{\mathbb{A}}"'] & & \mathbb{B} \arrow[dl, "\pi^{\mathbb{B}}"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Le groupe d'automorphismes d'une $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil* $\mathbb{A}$*, parfois appelé* groupe de Galois de $\mathbb{A}$*, est noté* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$*.*

Si $\mathbb{K}$ ne contient aucun élément nilpotent non nul, alors la préservation des idéaux nilpotents est automatiquement vérifiée et un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil est simplement un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres topologiques.

Le lemme suivant montre que toute $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$ est un anneau de base admissible, ce qui donne un sens à la notion d'applications lisses sur $\mathbb{A}$.

Lemme 6.2.2. *La projection canonique* $\pi^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ *d'une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil est un morphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbres de Weil, de même que sa section* $\sigma^{\mathbb{A}} : \mathbb{K} \to \mathbb{A}$*,* $x \mapsto x \cdot 1$*. Le groupe unité* $\mathbb{A}^{\times}$ *de* $\mathbb{A}$ *est ouvert et dense dans* $\mathbb{A}$*, et l'inversion* $\mathbb{A}^{\times} \to \mathbb{A}$ *est continue.*

Démonstration. La continuité de l'application $\pi^{\mathbb{A}}$ et celle de sa section $\sigma^{\mathbb{A}}$ sont claires. De plus, un élément $\boldsymbol{x} = x + x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$ de $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}$ est inversible si et seulement si x est inversible dans $\mathbb{K}$: en effet, son inverse est donné par

$$\boldsymbol{x}^{-1} = \left(x + x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)^{-1} = \left(1 + x^{-1}x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)^{-1} x^{-1} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(x^{-1}x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)^j x^{-1},$$

où k est la hauteur de $\mathbb{A}$. Par conséquent, $\mathbb{A}^{\times} = \mathbb{K}^{\times} \times \overset{\circ}{\mathbb{A}}$ est ouvert et dense dans $\mathbb{A}$, et la continuité de l'inversion dans $\mathbb{K}$ implique celle de l'inversion dans $\mathbb{A}$. $\square$

Exemples 6.2.3. L'application

$$\mathrm{TT}\mathbb{K} \to \mathrm{TT}\mathbb{K}, \quad x + \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 y_{12} \mapsto x + \varepsilon_1 y_2 + \varepsilon_2 y_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 y_{12}$$

est un automorphisme, appelé le *flip*. De même, nous obtenons une action du groupe symétrique Σ_k sur les éléments ε_I (voir [Bertram 2008]) qui induit des automorphismes canoniques d'algèbres de Weil de $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$.

Les *actions canoniques 2.1.1 et 2.1.6 de* $\mathbb{K}^{\times}$ sur $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$ et sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ se font également par automorphismes :

1. Pour tout r dans $\mathbb{K}^{\times}$, l'application

$$\mathrm{T}\mathbb{K} \to \mathrm{T}\mathbb{K}, \quad x + \varepsilon y \mapsto x + \varepsilon r y$$

   est un automorphisme.

2. Par récurrence, l'exemple précédent donne lieu à une action de $(\mathbb{K}^\times)^k$ par automorphismes sur les anneaux tangents itérés $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$. L'action du sous-groupe diagonal $\mathbb{K}^\times$ est précisément l'action cubique $\rho_{[\cdot]}$ de $\mathbb{K}^\times$ décrite à la définition 2.1.1.
3. Pour tout r dans $\mathbb{K}^\times$, l'action simpliciale $\rho_{\langle\cdot\rangle}(r)$ décrite à la définition 2.1.6 induit un automorphisme canonique qui s'exprime, sous l'isomorphisme entre $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}[X]/\left(X^{k+1}\right)$, de la manière suivante :
$$\mathrm{J}^k\mathbb{K} \to \mathrm{J}^k\mathbb{K}, \quad [P(X)] \mapsto [P(rX)].$$
L'action correspondante de $\mathbb{K}^\times$ par automorphismes est l'action $\rho_{\langle\cdot\rangle}$ décrite à la définition 2.1.6.

Exemples 6.2.4. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Alors les applications suivantes sont des morphismes de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil :
$$\mu^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad a \otimes a' \mapsto aa',$$
et
$$\tau^{\mathbb{A},\mathbb{B}} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \to \mathbb{B} \otimes \mathbb{A}, \quad a \otimes b \mapsto b \otimes a.$$
L'application $\tau^{\mathbb{A},\mathbb{B}}$ est appelée le *flip* de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Si $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, on note $\tau^{\mathbb{A},\mathbb{B}} := \tau^{\mathbb{A}}$ et on appelle $\tau^{\mathbb{A}}$ le *flip de* $\mathbb{A}$.

6.3 Extensions polynomiales

Définition 6.3.1. *Une* suite exacte (courte) de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil *est une suite de* $\mathbb{K}$*-algèbres de Weil*
$$\mathbb{V} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B},$$
où les applications i et Φ sont des morphismes de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil, respectivement injectif et surjectif, tels que la suite
$$\mathring{\mathbb{V}} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathring{\mathbb{A}} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathring{\mathbb{B}},$$
où on note $\mathbb{V} =: \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{V}}$, $\mathbb{A} =: \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ et $\mathbb{B} =: \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$, soit une suite exacte de $\mathbb{K}$-algèbres topologiques au sens usuel.

Elle est dite scindée *s'il existe un morphisme $s : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil tel que* $\Phi \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{B}}$.

Définition 6.3.2. *Une* extension polynomiale de degré j *d'une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil* $\mathbb{B}$ *par une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil* $\mathbb{V}$ *est une suite exacte de* $\mathbb{K}$*-algèbres de Weil*
$$\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{B},$$
*où $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et où $\mathbb{V}$ est de hauteur j. On considère alors $\mathring{\mathbb{V}}$ comme un idéal de $\mathbb{A}$, appelé l'*idéal vertical *de cette extension. L'extension est dite* scindée *si elle est scindée au sens des $\mathbb{K}$-algèbres de Weil.*

Définition 6.3.3. *Une extension polynomiale $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{B}$ de degré* 1 *est appelée* extension vectorielle*. L'idéal $\mathring{\mathbb{V}}$ est alors muni du produit nul. Une extension vectorielle est dite* centrale *si l'idéal $\mathring{\mathbb{V}}$ est contenu dans l'annulateur de $\mathring{\mathbb{A}}$.*

Les extensions polynomiales jouent un rôle important dans la théorie des fibrés : nous verrons au théorème 9.1.1 que toute extension polynomiale induit, pour toute variété M, un fibré polynomial sur M, au sens où les changements de cartes de fibrés sont polynomiaux fibre à fibre. En particulier, nous verrons que toute extension *vectorielle* induit un *fibré affine*.

Si une extension vectorielle est centrale et scindée, alors $\mathbb{A}$ est isomorphe à la somme de Whitney $\mathbb{B} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$ de $\mathbb{B}$ et de $\mathbb{V}$.

Exemple 6.3.4. Les anneaux tangents itérés. Pour tout entier naturel k, la suite suivante est une extension vectorielle scindée :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \oplus \varepsilon_{k+1}\mathrm{T}^k\mathbb{K} \arrow[r, hook] & \mathrm{T}^{k+1}\mathbb{K} \arrow[r, two heads] & \mathrm{T}^k\mathbb{K} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Elle n'est jamais centrale. Nous verrons à l'exemple 6.5.3 des extensions centrales, mais non scindées, associées aux anneaux $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$.

Exemple 6.3.5. Les anneaux de jets. Pour tout entier naturel k, la suite suivante est une extension vectorielle :

$$\mathbb{K} \oplus \delta^{k+1}\mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{J}^{k+1}\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{J}^k\mathbb{K}.$$

Elle n'est scindée que pour $k = 0$, et elle est centrale pour tout entier k.

6.4 Somme de Whitney et produit tensoriel

Proposition 6.4.1. *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathbb{K}$-algèbres de Weil de hauteurs respectives $k_{\mathbb{A}}$ et $k_{\mathbb{B}}$. Il existe des constructions naturelles de nouvelles algèbres de Weil à partir de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.*

1. *Le* produit tensoriel $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ *(où $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$) est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil, de hauteur $k_{\mathbb{A}} + k_{\mathbb{B}}$ et de décomposition*
$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} = \mathbb{K} \oplus \left(\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \otimes \mathring{\mathbb{B}} \right) .$$
2. *La* somme de Whitney $\mathbb{A} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{B} := \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} / \mathring{\mathbb{A}} \otimes \mathring{\mathbb{B}}$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil, de hauteur* $\max(k_{\mathbb{A}}, k_{\mathbb{B}})$ *et de décomposition*
$$\mathbb{A} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{B} \cong \mathbb{K} \oplus \left(\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}} \right) .$$
3. *Ces deux constructions satisfont à la règle de* distributivité *suivante :*
$$\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} (\mathbb{B} \oplus \mathbb{B}') \cong (\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{B}) \oplus_{\mathbb{A}} (\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{B}') .$$
4. *L'*espace le plus vertical $\mathbb{A} \diamond \mathbb{B} := \mathbb{K} \oplus \left(\mathring{\mathbb{A}} \otimes \mathring{\mathbb{B}} \right)$ *est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de Weil de $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$, de hauteur* $\min(k_{\mathbb{A}}, k_{\mathbb{B}})$*.*

Démonstration. Le produit tensoriel de deux algèbres commutatives est à nouveau une algèbre commutative, et nous avons la chaîne d'idéaux suivante :

$$\mathring{\mathbb{A}} \otimes \mathring{\mathbb{B}} \subset \left(\mathring{\mathbb{A}} \oplus \mathring{\mathbb{B}} \oplus \mathring{\mathbb{A}} \otimes \mathring{\mathbb{B}} \right) \subset \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}.$$

Comme $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ est à nouveau libre et de dimension finie sur $\mathbb{K}$, la topologie produit est définie de manière canonique sur $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ et sur ses quotients respectifs. Les décompositions données sont des isomorphismes standards au niveau algébrique, et donc, d'après les précédentes remarques, sont également des homéomorphismes. $\square$

Exemples 6.4.2. Appliquons les constructions à l'algèbre de Weil $\mathrm{T}\mathbb{K}$:

1. L'algèbre $\mathrm{T}^2\mathbb{K} \simeq \mathrm{T}\mathbb{K} \otimes \mathrm{T}\mathbb{K}$ est une algèbre de Weil de hauteur $2 = 1 + 1$.
2. L'algèbre $\mathrm{T}\mathbb{K} \oplus_{\mathbb{K}} \mathrm{T}\mathbb{K}$ est une algèbre de Weil de hauteur $1 = \max(1, 1)$
3. L'algèbre $\mathrm{T}\mathbb{K} \diamond \mathrm{T}\mathbb{K}$ est une algèbre de Weil isomorphe à $\mathrm{T}\mathbb{K}$, de hauteur $1 = \min(1, 1)$.

Exemples 6.4.3. Plus généralement, le produit tensoriel

$$\underbrace{\mathrm{T}\mathbb{K} \otimes \cdots \otimes \mathrm{T}\mathbb{K}}_{k \text{ fois}}$$

est naturellement isomorphe à $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$, de hauteur $k = 1 + \ldots + 1$. La somme directe

$$\underbrace{\mathrm{T}\mathbb{K} \oplus_{\mathbb{K}} \ldots \oplus_{\mathbb{K}} \mathrm{T}\mathbb{K}}_{k \text{ fois}}$$

est naturellement isomorphe à *l'algèbre de Weil des k-*vitesses $\mathbb{W}_k^1(\mathbb{K})$, et a pour hauteur $1 = \max(1, \ldots, 1)$. L'algèbre de Weil $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$ est un quotient de $\mathbb{W}_k^1(\mathbb{K})$.

Proposition 6.4.4. *Soient $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ et $\mathbb{B} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{B}}$ deux $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *La suite suivante est une suite exacte de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil :*

$$\mathbb{A} \diamond \mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \twoheadrightarrow \mathbb{A} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{B}.$$

2. *Cette suite est scindée naturellement en tant que $\mathbb{K}$-modules (mais pas en tant qu'algèbres en général), par l'inclusion*

$$\mathbb{A} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{B} \to \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$$

mais ce n'est pas un morphisme d'algèbres en général.

Exemple 6.4.5. L'algèbre

$$\mathrm{T}^2\mathbb{K} = \mathrm{T}\mathbb{K} \otimes \mathrm{T}\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\mathbb{K} \oplus \varepsilon_2\mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K}$$

se projette sur la somme de Whitney

$$\mathrm{T}\mathbb{K} \oplus_{\mathbb{K}} \mathrm{T}\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\mathbb{K} \oplus \varepsilon_2\mathbb{K}$$

L'espace le plus vertical $\mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathrm{T}\mathbb{K}$ et s'injecte naturellement dans $\mathrm{T}^2\mathbb{K}$.

6.5 Algèbres de Weil graduées

Nous allons définir des algèbres de Weil particulièrement importantes : les algèbres de Weil graduées. En fait, toutes les algèbres de Weil que nous considérons sont graduées et il est difficile de construire un exemple d'algèbre de Weil qui n'admet pas de $\mathbb{N}$-graduation (voir [Kureš, Mikulski 2004]). Dans le lemme 5.2.1, nous avons vu que de telles graduations apparaissent naturellement au niveau du calcul différentiel.

Définition 6.5.1. *Une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil* $\mathbb{A}$ *est dite* ($\mathbb{N}$-)graduée, de longueur k, *si elle est de la forme* $\mathbb{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_k$, *où* $\mathcal{A}_0 = \mathbb{K}$, *et où les* $\mathcal{A}_i$ *sont des sous-modules libres tels que pour tous entiers* $0 \leq i, j \leq n$,

$$\mathcal{A}_i \cdot \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j},$$

où on pose $\mathcal{A}_\ell := \{0\}$ *si* $\ell > k$.

Proposition 6.5.2. *Pour toute* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil graduée* $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_k$, *il existe une suite d'extensions vectorielles centrales, appelée* la tour d'extensions de $\mathbb{A}$ associée à la graduation *:*

$$\begin{gathered}
\mathbb{A}_k \hookrightarrow \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{B}_{k-1} \\
\mathbb{A}_{k-1} \hookrightarrow \mathbb{B}_{k-1} \twoheadrightarrow \mathbb{B}_{k-2} \\
\vdots \\
\mathbb{A}_2 \hookrightarrow \mathbb{B}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{B}_1 \\
\mathbb{A}_1 \hookrightarrow \mathbb{B}_1 \twoheadrightarrow \mathbb{K},
\end{gathered}$$

où pour tout entier $0 \leq i \leq k-1$, *on pose*

$$\mathbb{B}_i := \mathbb{A}/\left(\mathcal{A}_{i+1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_k\right) \simeq \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_i,$$

munie de la structure d'algèbre quotient, et où on pose $\mathbb{A}_{i+1} := \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_{i+1}$, *avec* $\mathcal{A}_{i+1}$ *muni du produit nul.*

Exemple 6.5.3. Les anneaux tangents itérés

$$\mathrm{T}^k\mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,k\}} \varepsilon_I \mathbb{K}$$

sont des algèbres de Weil graduées, de graduation $\mathrm{T}^k\mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i$, où, pour tout entier $1 \leq i \leq k$,

$$\mathcal{A}_i := \bigoplus_{I \subset \{1,\ldots,k\}, |I| = i} \varepsilon_I \mathbb{K},$$

où $|I|$ désigne le cardinal de I. Notez que les extensions vectorielles

$$\mathbb{K} \oplus \bigoplus_{I \subset \{1,\ldots,k\}, |I| = \ell} \varepsilon_I \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,k\}, |I| \leq \ell} \varepsilon_I \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,k\}, |I| < \ell} \varepsilon_I \mathbb{K}$$

de sa tour d'extensions sont centrales, ne sont pas scindées, et sont différentes des extensions

$$\mathbb{K} \oplus \varepsilon_{i+1}\mathrm{T}^k\mathbb{K} \to \mathrm{T}^{i+1}\mathbb{K} \to \mathrm{T}^i\mathbb{K}.$$

Exemple 6.5.4. Les anneaux de jets $\mathrm{J}^k\mathbb{K} = \mathbb{K}[X]/(X^{k+1}) \simeq \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \delta^i\mathbb{K}$, où δ est un élément nilpotent d'ordre $k+1$, sont des algèbres de Weil graduées. Comme dans le cas des anneaux tangents itérés, les extensions vectorielles centrales

$$\mathbb{K} \oplus \delta^{i+1}\mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{J}^{i+1}\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{J}^i\mathbb{K}.$$

de sa tour d'extensions ne sont pas scindées (sauf pour $i = 0$).

Groupes d'automorphismes

Nous portons de l'intérêt aux algèbres de Weil graduées car elles admettent un grand groupe d'automorphismes : si nous écrivons un élément a de $\mathbb{A} = \bigoplus_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i$ sous la forme $(a_i)_{0\leq i\leq k}$, où a_i appartient à $\mathcal{A}_i$ pour tout i, alors nous obtenons immédiatement que pour tout r dans $\mathbb{K}^\times$, l'application

$$\mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad (a_i)_{0\leq i\leq k} \mapsto (r^i a_i)_{0\leq i\leq k}$$

définit une famille à un paramètre d'automorphismes, correspondant à la dérivation

$$\mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad (a_i)_{0\leq i\leq k} \mapsto (ia_i)_{0\leq i\leq k}.$$

Ceci généralise les actions canoniques cubiques et simpliciales de $\mathbb{K}^\times$ sur $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$ et sur $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$.

Définition 6.5.5. *Pour toute algèbre de Weil graduée $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_k$, on définit l'*action naturelle de $\mathbb{K}^\times$ sur $\mathbb{A}$ *par*

$$\rho(r)\left(x + \sum_{i=1}^{k} x_i\right) := x + \sum_{i=1}^{k} r^i x_i.$$

Mais il existe d'autres applications canoniques : rappelons que la formule usuelle de composition de deux séries formelles sans terme constant Q et P dans $\mathbb{K}[[X]]_0$, est donnée, pour $Q(X) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X^n$ et $P(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$, par la formule explicite

$$Q \circ P(X) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n, \quad \text{avec} \qquad c_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^j, |\boldsymbol{\alpha}|=n} a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_j}\,. \tag{6.5.1}$$

Si Q possède un terme constant b_0, alors la même formule est encore valable, avec $c_0 = b_0$, de sorte que nous obtenons un endomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{K}[[X]] \to \mathbb{K}[[X]], \quad Q \mapsto Q \circ P.$$

Cependant, si P possède un terme constant non nul, alors la composition n'est pas définie. Afin de définir pour tout P dans $\mathbb{K}[[X]]$ un endomorphisme d'algèbres, on considère le *shift*

$$S : \mathbb{K}[[X]] \to \mathbb{K}[[X]]_0, \quad P(X) \mapsto XP(X),$$

et on pose

$$R_P : \mathbb{K}[[X]] \to \mathbb{K}[[X]],\ S \mapsto R_P(Q) := Q \circ (SP) = Q \circ (XP),$$

d'où l'on déduit, à partir de la formule 6.5.1, la formule explicite

$$\left(R_P(Q)\right)(X) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) \circ \left(X \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \tag{6.5.2}$$

avec $u_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=n-j} a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_j}$ (pour $n = 0$, ceci doit être interprété par $u_0 := b_0$). La formule pour u_n est alors compatible avec les algèbres graduées, ce qui mène au résultat suivant :

Théorème 6.5.6. *Soit $\mathbb{A}$ une algèbre de Weil graduée de hauteur k. Alors pour tout élément $a = (a_i)_{0\leq i\leq k}$ de $\mathbb{A}$, l'application*

$$R_a : \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad b = (b_i)_{0\leq i\leq k} \mapsto R_a(b) := (u_i)_{0\leq i\leq k},$$

où $u_0 := b_0$ et où pour tout entier $1 \leq i \leq k$,

$$u_i := \sum_{j=1}^{i} b_j \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j} a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_j},$$

est un endomorphisme de l'algèbre de Weil $(\mathbb{A}, +, \cdot)$. C'est un automorphisme si et seulement si a appartient à $\mathbb{A}^\times$, c'est-à-dire si et seulement si a_0 est un élément de $\mathbb{K}^\times$.

Démonstration. Ce produit est en effet bien défini : avec les notations du théorème, u_i appartient à $\mathbb{A}_i$. L'application $\Psi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}[[X]]$, $(a_i)_i \mapsto \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire, d'image $\mathbb{A}' := \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1 X \oplus \cdots \oplus \mathbb{A}_k X^k$. Elle fait intervenir toutes les structures algébriques que nous avons considérées jusqu'ici : l'addition $+$, le produit d'algèbre $\cdot$ (nous utilisons ici la nilpotence de $\mathbb{A}$) et la correspondance $a \mapsto R_a$ (comme définie dans le théorème), avec la correspondance notée R pour les séries formelles. Par conséquent toutes les assertions se déduisent des propriétés de l'anneau des séries formelles $\mathbb{A}[[X]]$. □

Exemple 6.5.7. Si $a = a_0 = r$ appartient à $\mathbb{K}^\times$, alors l'opérateur R_a nous donne à nouveau l'action canonique du groupe $\mathbb{K}^\times$.

Exemple 6.5.8. Soit $\mathbb{A} = \mathrm{T}^k\mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{\emptyset\neq I\subset\{1,\ldots,k\}} \varepsilon_I\mathbb{K}$, et soit a tel que $a_I = 0$ pour $|I| \neq 1$ et $a_I = \varepsilon_j$ pour $I = \{j\}$. Alors R_a est l'*opérateur de shift* noté S_{0j} au chapitre 20 du livre [Bertram 2008].

Exemple 6.5.9. De manière analogue, pour $\mathbb{A} = \mathrm{J}^k\mathbb{K} = \mathbb{K}[X]/(X^{k+1})$, avec $a = a_1 = \delta$, nous obtenons un shift $[P(X)] \mapsto [P(X^2)]$.

Montrons que l'ensemble des automorphismes définis au théorème 6.5.6 forme un groupe.

Théorème 6.5.10. *Reprenons les notations du théorème 6.5.6. Alors, pour tous éléments a et b de $\mathbb{A}$, la propriété suivante est vérifiée :*

$$R_a \circ R_b = R_{a\cdot R_a(b)}.$$

La loi ainsi définie induit un produit sur $\mathbb{A}$, bien défini, donné par

$$b \star a := a \cdot R_a(b),$$

ce qui correspond à la formule explicite

$$b \star a = (b_i) \star (a_i) := (u_i),$$

avec

$$u_0 = b_0 \quad \text{et} \quad \forall i > 0, u_i = \sum_{j=1}^{i} b_j \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j} a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_j}.$$

Ce produit est associatif et distributif à droite, c'est-à-dire qu'il satisfait

$$(b+b')\star a = b\star a + b'\star a \quad \text{et} \quad (b\cdot b')\star a = (b\star a)\cdot(b'\star a).$$

L'application

$$(\mathbb{A},\star)\to(\mathrm{End}(\mathbb{A}),\circ),\ \ a\mapsto R_a$$

est un homomorphisme de monoïdes et $\mathbb{A}^\times$ *est envoyé dans* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$.

Démonstration. En utilisant l'application Ψ de la preuve du théorème 6.5.6, la première assertion revient à noter que, pour des séries formelles P et Q de $\mathbb{K}[[X]]$, nous avons

$$S\circ(XQ)\circ(XP) = S\circ(X\cdot P\cdot(Q\circ XP)),$$

et l'associativité de $\star$ est prouvée de manière similaire en remarquant que

$$Q\star P = P\cdot(Q\circ XP) = \frac{1}{X}((XQ)\circ(XP)),$$

de sorte que $\star$ est obtenue par push-forward, via le shift $P\mapsto XP$, à partir de l'associativité de la composition usuelle $\circ$ de $\mathbb{A}[[X]]_0$. Finalement, le fait que l'application $a\mapsto R_a$ soit un morphisme de monoïdes est vrai par définition, et la formule explicite est obtenue à partir de la formule (6.5.1). □

6.6 Drapeaux d'idéaux

Nous montrons dans cette section que toute algèbre de Weil $\mathbb{A}$ possède un drapeau canonique d'idéaux. Ce drapeau sera notamment utile pour comprendre comment inverser les applications $\mathbb{A}$-polynomiales. De plus, il permettra d'associer à toute algèbre de Weil $\mathbb{A}$ un ensemble de suites exactes d'algèbres topologiques, comme nous le verrons à la proposition 6.6.4.

Définition 6.6.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-module. Un* drapeau (descendant) *de V est une suite de sous-$\mathbb{K}$-modules $(V_i)_{0\le i\le k}$ strictement descendante au sens de l'inclusion, où l'entier $k+1$ est appelé la* longueur du drapeau *:*

$$\{0\} = V_{k+1}\subset V_k\subset\ldots\subset V_1\subset V_0 = V.$$

1. *Un endomorphisme f de V est dit* descendant *relativement à un drapeau $(V_i)_i$ si pour tout i, $f(V_i)\subset V_{i+1}$.*
2. *Un endomorphisme f de V est dit* triangulaire *relativement à un drapeau $(V_i)_i$ s'il préserve le drapeau, c'est-à-dire si pour tout i, $f(V_i)\subset V_i$.*

Dans le cas où V est un module libre de type fini, de même que tous les V_i de dimensions respectives n_i, le drapeau est dit admissible *s'il existe une $\mathbb{K}$-base $(v_{ij})_{ij}$ de V adaptée au drapeau, c'est-à-dire telle que $\{v_{ij}, 1\le i\le \ell, 1\le j\le n_i\}$ est une base de V_ℓ pour tout entier $0\le \ell\le k$.*

Pour tout drapeau admissible de V de longueur k, on note

$$\mathcal{GR}(V) := \bigoplus_{i=1}^{k} V_i/V_{i+1}.$$

Un drapeau est admissible si et seulement si pour tout entier $1 \leq i \leq k$, le module V_{i+1} admet un supplémentaire dans V_i. Le choix de tels espaces supplémentaires induit un isomorphisme linéaire entre V et $\mathcal{GR}(V)$.

Proposition 6.6.2. *Soit $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil de hauteur k. Considérons, pour tout i dans $\mathbb{N}^\star$, l'annulateur*

$$\mathring{\mathbb{A}}_i := \left\{ x \in \mathring{\mathbb{A}} \;\middle|\; x\, \mathring{\mathbb{A}}^{k+1-i} = \{0\} \right\}$$

de $\mathring{\mathbb{A}}^{k+1-i}$ dans $\mathring{\mathbb{A}}$, considéré comme un sous-$\mathbb{A}$-module de $\mathbb{A}$. Ceci définit un drapeau d'idéaux, de longueur $k+1$:

$$\{0\} = \mathring{\mathbb{A}}_{k+1} \subset \mathring{\mathbb{A}}_k \subset \ldots \subset \mathring{\mathbb{A}}_1 = \mathring{\mathbb{A}} \subset \mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}},$$

qui vérifie de plus, pour tout entier naturel i,

$$\mathring{\mathbb{A}} \cdot \mathring{\mathbb{A}}_i \subset \mathring{\mathbb{A}}_{i+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{A} \cdot \mathring{\mathbb{A}}_i \subset \mathring{\mathbb{A}}_i,$$

c'est-à-dire que l'action de $\mathbb{A}$ est triangulaire et que l'action de $\mathring{\mathbb{A}}$ est descendante. Il induit un drapeau naturel d'idéaux de $\mathring{\mathbb{A}}$, de longueur k.

Ces drapeaux sont appelés les *drapeaux canoniques* de $\mathring{\mathbb{A}}$ et de $\mathbb{A}$. L'indexation est justifiée par la propriété suivante : pour tout entier naturel i, $\mathring{\mathbb{A}}^i$ est inclus dans $\mathring{\mathbb{A}}_i$ puisque

$$\mathring{\mathbb{A}}^i \, \mathring{\mathbb{A}}^{k+1-i} = \mathring{\mathbb{A}}^{k+1} = \{0\}.$$

Notez qu'il n'y a pas égalité en général entre $\mathring{\mathbb{A}}^i$ et $\mathring{\mathbb{A}}_i$, comme le montrent les deux exemples suivants.

Exemples 6.6.3.

1. Considérons l'algèbre des 2-jets $\mathbb{A} = \mathrm{J}^2\mathbb{K} \simeq \mathbb{K}[X]/(X^3)$. Alors les ensembles $\mathring{\mathbb{A}}_2$ et $\mathring{\mathbb{A}}^2$ sont égaux :

$$\left(\mathrm{J}^2\mathring{\mathbb{K}}\right)^2 = \delta^2\mathbb{K} = \left(\mathrm{J}^2\mathring{\mathbb{K}}\right)_2 .$$

2. En revanche, pour l'algèbre double tangente $\mathbb{A} = \mathrm{T}^2\mathbb{K} \simeq \mathbb{K}[X_1, X_2]/(X_1^2, X_2^2)$, les ensembles $\left(\mathrm{T}^2\mathring{\mathbb{K}}\right)^2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K}$ et $\left(\mathrm{T}^2\mathring{\mathbb{K}}\right)_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K}$ sont différents si 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{K}$.

Dans toute la suite, nous supposerons qu'il existe une base adaptée à ce drapeau. Notez que l'isomorphisme entre $\mathbb{A}$ et $\mathcal{GR}(\mathbb{A}) := \mathbb{K} \oplus \mathcal{GR}\left(\mathring{\mathbb{A}}\right)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-modules, et non pas de $\mathbb{K}$-algèbres.

Proposition 6.6.4. *Pour toute $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$, il existe une suite d'extensions vectorielles centrales, appelée* la tour d'extensions de $\mathbb{A}$ associée au drapeau canonique*.*

$$\mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}_k \hookrightarrow \mathbb{A} \twoheadrightarrow \mathbb{A}/\mathring{\mathbb{A}}_k$$

$$\mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}_{k-1}/\mathring{\mathbb{A}}_k \hookrightarrow \mathbb{A}/\mathring{\mathbb{A}}_k \twoheadrightarrow \mathbb{A}/\mathring{\mathbb{A}}_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}_1/\mathring{\mathbb{A}}_2 \hookrightarrow \mathbb{A}/\mathring{\mathbb{A}}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{A}/\mathring{\mathbb{A}}_1 = \mathbb{K}$$

Démonstration. Nous avons considéré à la section précédente le drapeau canonique de $\mathbb{A}$ et nous avons supposé qu'il existe toujours une base adaptée à ce drapeau, de sorte que les $\mathbb{K}$-modules $\mathring{\mathbb{A}}_i/\mathring{\mathbb{A}}_{i+1}$ sont bien définis pour tous entiers $i \leq j$. Le drapeau canonique induit la tour d'extensions vectorielles de $\mathbb{A}$ donnée dans la proposition. En effet, ce sont des suites de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil (pour les structures d'algèbres quotient) et chaque suite d'idéaux

$$\mathring{\mathbb{A}}_i/\mathring{\mathbb{A}}_{i+1} \hookrightarrow \mathring{\mathbb{A}}/\mathring{\mathbb{A}}_{i+1} \twoheadrightarrow \mathring{\mathbb{A}}/\mathring{\mathbb{A}}_i$$

est une suite exacte d'algèbres topologiques. Les extensions sont vectorielles et centrales car les idéaux $\mathring{\mathbb{A}}_i/\mathring{\mathbb{A}}_{i+1}$ sont tous nilpotents d'ordre 2 et annulent $\mathring{\mathbb{A}}/\mathring{\mathbb{A}}_{i+1}$ puisque $\mathring{\mathbb{A}} \cdot \mathring{\mathbb{A}}_i \subset \mathring{\mathbb{A}}_{i+1}$. $\square$

Chapitre 7

Foncteurs de Weil

Nous allons construire, pour toute $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$, le foncteur de Weil

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}an_{\mathbb{K}} \to \mathcal{M}an_{\mathbb{A}},$$

de la catégorie des variétés lisses sur $\mathbb{K}$ dans la catégorie des variétés lisses sur $\mathbb{A}$. Les définitions élémentaires concernant les variétés dans notre cadre différentiel sont données à la section B.1. Ce foncteur pourra être interprété comme un foncteur d'extension scalaire de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{A}$. Nous montrerons ainsi que toute application f lisse sur $\mathbb{K}$ admet une unique extension en une application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f$ lisse sur $\mathbb{A}$. Cette propriété dépend fortement du fait que $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Par exemple, si l'on considère une application lisse sur $\mathbb{R}$, il n'existe pas d'extension $\mathbb{C}$-différentiable de f si f n'est pas analytique (et même si elle est analytique, il n'existe pas de « domaine canonique » sur lequel l'extension peut être définie).

Nous montrons que la construction des foncteurs de Weil est fonctorielle non seulement en les variétés, mais également en les algèbres de Weil. Pour tout morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, et pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, il existe une application $\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ qui commute avec les applications étendues $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}f$: $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}f \circ \Phi_M = \Phi_M \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}f$. La lissité de l'application Φ_M est assez particulière : elle est lisse sur $\mathbb{K}$, mais également sur $\mathbb{A}$ en un certain sens : tout morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ induit une structure de variété $\mathbb{A}$-lisse sur $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$. C'est relativement à cette structure que Φ_M est $\mathbb{A}$-lisse. Cette subtilité prendra tout son sens lorsque nous étudierons l'application $\tau_M^{\mathbb{A}}$ induite par le flip $\tau^{\mathbb{A}}$ d'une algèbre de Weil.

Nous terminerons ce chapitre par l'étude des extensions de variétés qui possèdent des structures supplémentaires : les groupes de Lie.

7.1 Construction des foncteurs de Weil

Dans la première partie, nous avons construit les foncteurs J^k et T^k à partir des anneaux $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ et $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$. Nous allons suivre la même méthode de construction pour définir le foncteur de Weil associé à une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$ quelconque : nous souhaitons étendre les variétés lisses sur $\mathbb{K}$ (voir la définition B.1.1) en des variétés lisses sur $\mathbb{A}$. D'après le théorème B.1.2 de construction par cocycles des variétés, une variété lisse sur $\mathbb{K}$ est entièrement déterminée par son modèle, qui est un $\mathbb{K}$-module, et par ses changements de cartes, qui sont des applications lisses sur $\mathbb{K}$ entre deux $\mathbb{K}$-modules topologiques. Finalement, pour définir l'extension $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ de la variété M, nous sommes ramenés à étendre les $\mathbb{K}$-modules en des $\mathbb{A}$-modules et les applications lisses sur $\mathbb{K}$ entre $\mathbb{K}$-modules en des applications lisses sur $\mathbb{A}$ entre $\mathbb{A}$-modules.

Tout au long de cette section, gardons en tête que le foncteur de Weil que nous allons construire est un foncteur d'extension scalaire de l'anneau $\mathbb{K}$ à la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{A}$. Par conséquent, certaines extensions telles que les extensions $V_{\mathbb{A}} = V \otimes \mathbb{A}$ de $\mathbb{K}$-modules V à $\mathbb{A}$ ou les extensions $P_{\mathbb{A}}$ et $P_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$ d'applications polynomiales P à $\mathbb{A}$ et à $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ sont entièrement canoniques : ce sont les extensions scalaires algébriques définies dans l'annexe A.3.1. Pour définir les extensions des applications lisses $f : U \subset V \to W$ quelconques, nous nous ramènons à l'extension des applications polynomiales en identifiant les applications f et leur polynôme de Taylor $\mathrm{Tay}_x^k f$. On pose alors

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f : U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \to W \times W_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}, \qquad \left(x, x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) \mapsto \left(f(x), \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \left(x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)\right).$$

La fonctorialité de cette extension nous permet de montrer que les extensions d'applications qui vérifient les relations de cocyle vérifient à nouveau les relations de cocycle. Ceci implique que l'extension d'un $\mathbb{K}$-atlas de variété est un $\mathbb{A}$-atlas, à partir duquel nous pouvons construire une variété, que nous notons $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ et que nous appelons *variété* $\mathbb{A}$*-tangente* de M.

7.1.1 Domaines étendus

Extension de domaines

La première étape vers la définition des foncteurs de Weil est la définition des *domaines étendus* sur des ouverts U d'un $\mathbb{K}$-module topologique V. Rappelons-nous du point de vue de Weil, et en particulier de la seconde assertion du théorème 1.1.6 : le prolongement ${}^{\mathbb{A}}V$ possède une structure canonique de $\mathbb{A}$-module, isomorphe à $V \otimes \mathbb{A}$. C'est précisément la définition de l'extension scalaire algébrique que nous considérons. L'extension scalaire algébrique de V

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} V := V_{\mathbb{A}} := V \otimes \mathbb{A}$$

se décompose de la manière suivante

$$V_{\mathbb{A}} = V \otimes \left(\mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}\right) = V \oplus \left(V \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}\right) =: V \oplus V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}},$$

et, si $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$ relativement à une $\mathbb{K}$-base de $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$, alors $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{K}$-module topologique, à V^n muni de la topologie produit. La projection canonique

$$\pi_V^{\mathbb{A}} : V_{\mathbb{A}} = V \oplus V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \to V$$

et sa section

$$\sigma_V^{\mathbb{A}} : V \to V \oplus V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$$

sont continues. Plus généralement, pour tout ouvert U inclus dans V, on définit le *domaine* $\mathbb{A}$*-étendu* comme étant

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} U := \left(\pi_V^{\mathbb{A}}\right)^{-1} (U) = U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \subset V_{\mathbb{A}}.$$

Pour tout x dans U, l'ensemble $\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}} U := \left(\pi_V^{\mathbb{A}}\right)^{-1} (\{x\}) \cong V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \subset \mathrm{T}^{\mathbb{A}} U$ est appelé la *fibre sur* x ou *au-dessus de* x.

Structure des domaines étendus

Comprendre la structure des domaines étendus nous aidera à comprendre la structure des applications $\mathbb{A}$-polynomiales, et des applications lisses sur $\mathbb{A}$.

Proposition 7.1.1. *Soient $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et V un $\mathbb{K}$-module. Alors $V_{\mathbb{A}}$ admet un drapeau de $\mathbb{A}$-modules*

$$\{0\} = V_{\mathring{\mathbb{A}}_{k+1}} \subset V_{\mathring{\mathbb{A}}_k} \subset \ldots \subset V_{\mathring{\mathbb{A}}_1} = V_{\mathring{\mathbb{A}}} \subset V_{\mathbb{A}},$$

induit par le drapeau canonique de $\mathbb{A}$. Il vérifie pour tout entier naturel i

$$\mathring{\mathbb{A}} \cdot V_{\mathring{\mathbb{A}}_i} \subset V_{\mathring{\mathbb{A}}_{i+1}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{A} \cdot V_{\mathring{\mathbb{A}}_i} \subset V_{\mathring{\mathbb{A}}_i}.$$

Il est appelé drapeau canonique de $V_{\mathbb{A}}$ *et induit naturellement un drapeau canonique de $V_{\mathring{\mathbb{A}}}$.*

7.1.2 Applications étendues

Applications polynomiales étendues

Soit $P : V \to W$ une application $\mathbb{K}$-polynomiale, de degré au plus k. On considère ses extensions scalaires $P_{\mathbb{A}} : V_{\mathbb{A}} \to W_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{A}$ et $P_{\mathring{\mathbb{A}}} : V_{\mathring{\mathbb{A}}} \to W_{\mathring{\mathbb{A}}}$ de $\mathbb{K}$ à $\mathring{\mathbb{A}}$, au sens de la définition A.3.1. En particulier, pour un élément de la forme $v \otimes a$, si nous écrivons $P = \sum_{i=0}^{k} P_i$ avec P_i homogène de degré i, alors

$$P_{\mathbb{A}}(v \otimes a) = \sum_{i=0}^{k} (P_i)_{\mathbb{A}}(v \otimes a) = \sum_{i=0}^{k} P_i(v) \otimes a^i.$$

Alors $P_{\mathbb{A}}$ *étend* P dans le sens où $P_{\mathbb{A}}(v \otimes 1) = P(v) \otimes 1$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute

$$P_{\mathbb{A}} \circ \sigma_V^{\mathbb{A}} = \sigma_W^{\mathbb{A}} \circ P : \quad \begin{tikzcd} V_{\mathbb{A}} \arrow[r, "P_{\mathbb{A}}"] & W_{\mathbb{A}} \\ V \arrow[u, "\sigma_V^{\mathbb{A}}"] \arrow[r, "P"'] & W \arrow[u, "\sigma_W^{\mathbb{A}}"'] \end{tikzcd}$$

Cette propriété correspond à la définition de l'extension scalaire dans le livre [Loos 1975] et dans les articles [Roby 1963] et [Xantcha 2011] .

Notez que le diagramme suivant commute également

$$P \circ \pi_V^{\mathbb{A}} = \pi_W^{\mathbb{A}} \circ P_{\mathbb{A}} : \quad \begin{tikzcd} V_{\mathbb{A}} \arrow[r, "P_{\mathbb{A}}"] \arrow[d, "\pi_V^{\mathbb{A}}"'] & W_{\mathbb{A}} \arrow[d, "\pi_W^{\mathbb{A}}"] \\ V \arrow[r, "P"'] & W \end{tikzcd}$$

De la même manière, nous définissons $P_{\mathring{\mathbb{A}}}$, en remarquant toutefois qu'il n'y a pas dans ce cas de diagramme commutatif de sections puisqu'il n'existe pas de section naturelle $\mathbb{K} \to \mathring{\mathbb{A}}$ en général.

Applications lisses étendues

Le résultat suivant généralise le théorème 5.2.2 de $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ au cas d'une algèbre de Weil $\mathbb{A}$ arbitraire :

Théorème 7.1.2. (Existence et unicité des foncteurs de Weil). *Soit $f : U \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^{[\infty]}$ sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors f admet une* unique *extension en une application lisse sur $\mathbb{A}$, notée $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}W$, où le terme « extension » signifie que le diagramme suivant commute :*

$$T^{\mathbb{A}} f \circ \sigma_U^{\mathbb{A}} = \sigma_W^{\mathbb{A}} \circ f \quad : \quad \begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \arrow[r, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}W \\ U \arrow[u, "\sigma_U^{\mathbb{A}}"] \arrow[r, "f"'] & W \arrow[u, "\sigma_W^{\mathbb{A}}"'] \end{tikzcd}$$

De plus, la construction est fonctorielle : pour toute application $\mathbb{K}$-lisse $g : U' \to W$ telle que $f(U) \subset U'$, nous avons

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}(g \circ f) = \mathrm{T}^{\mathbb{A}} g \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} f.$$

L'extension $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$ de l'application f est appelée *application $\mathbb{A}$-tangente* ou *application étendue à $\mathbb{A}$*.

Démonstration. 1. *Existence de l'extension.* Supposons que $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ soit de hauteur k. Pour tout x dans U, nous définissons

$$\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}} f := \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\mathring{\mathbb{A}}} : V_{\mathring{\mathbb{A}}} \to W_{\mathring{\mathbb{A}}}$$

comme étant l'extension scalaire de $\mathbb{K}$ à $\mathring{\mathbb{A}}$ du polynôme de Taylor $\mathrm{Tay}_x^k f$, et nous posons

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}W, \quad \left(x, x_{\mathring{\mathbb{A}}}\right) \mapsto \left(f(x), \mathrm{T}_x^{\mathbb{A}} f\left(x_{\mathring{\mathbb{A}}}\right)\right).$$

(a) *Continuité de f.* Prouvons tout d'abord que l'application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$ est continue. D'après le théorème A.3.2, puisque $P := \mathrm{Tay}_x^k f : V \to W$ est une application polynomiale continue, son extension scalaire

$$P_{\mathring{\mathbb{A}}} : V_{\mathring{\mathbb{A}}} \to W_{\mathring{\mathbb{A}}}, \quad x_{\mathring{\mathbb{A}}} \mapsto \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\mathring{\mathbb{A}}}\left(x_{\mathring{\mathbb{A}}}\right)$$

est continue. En analysant la preuve du théorème A.3.2, nous voyons que la dépendance en x est également continue, c'est-à-dire que l'application

$$V_{\mathbb{A}} \to W_{\mathring{\mathbb{A}}}, \quad \left(x, x_{\mathring{\mathbb{A}}}\right) \mapsto \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\mathring{\mathbb{A}}}\left(x_{\mathring{\mathbb{A}}}\right)$$

est continue, et par conséquent, l'application

$$V_{\mathbb{A}} \to W_{\mathbb{A}}, \quad \left(x, x_{\mathring{\mathbb{A}}}\right) \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}} f\left(x, x_{\mathring{\mathbb{A}}}\right)$$

est également continue (voir la remarque A.3.4).

(b) *Fonctorialité de la construction.* Pour prouver la fonctorialité, nous utilisons la règle de composition pour les polynômes de Taylor (voir le théorème 5.3.1, partie (iii)), ainsi que la nilpotence de $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ et le fait que, si P est une application polynomiale contenant uniquement des termes de degré strictement supérieur à k, alors son extension $P_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$ est nulle par nilpotence. Nous en déduisons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}(g \circ f) &= (\mathrm{Tay}_x^k(g \circ f))_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \\
&= \left(\mathrm{Tay}_{f(x)}^k g \circ \mathrm{Tay}_x^k f \mod (\deg > k)\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \\
&= \left(\mathrm{Tay}_{f(x)}^k g \circ \mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \\
&= \left(\mathrm{Tay}_{f(x)}^k g\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \circ \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \\
&= \mathrm{T}_{f(x)}^{\mathbb{A}} g \circ \mathrm{T}_x^{\mathbb{A}} f\,.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ est un foncteur covariant. Il préserve clairement les produits cartésiens, au sens où $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}(f \times g) = \mathrm{T}^{\mathbb{A}} f \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}} g$.

(c) *Lissité sur* $\mathbb{A}$ *de* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$. Nous allons maintenant prouver que l'application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$ est lisse sur $\mathbb{A}$. En fait, tous les arguments utilisés dans la preuve du théorème 5.2.2 s'appliquent : $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \otimes \mathbb{A}$ est à nouveau un anneau, et cet anneau est canoniquement isomorphe à $\mathbb{A}$ lui-même. Les conditions définissant la classe $\mathcal{C}^{[1]}$ sur $\mathbb{K}$ peuvent être définies à l'aide d'un diagramme commutatif faisant intervenir des produits cartésiens. Par conséquent, en appliquant le foncteur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$, qui préserve les produits cartésiens, nous obtenons un diagramme commutatif similaire sur l'anneau $\mathbb{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathbb{K}$, où toutes les applications sont remplacées par les applications $\mathbb{A}$-tangentes. Nous obtenons ainsi

$$\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f\right)^{]1[,\mathbb{A}} = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\left(f^{]1[,\mathbb{K}}\right).$$

Comme $f^{[1]}$ est lisse sur $\mathbb{K}$, l'application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\left(f^{[1],\mathbb{K}}\right)$ est continue d'après les étapes précédentes de la preuve, et donc l'application $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f\right)^{]1[,\mathbb{A}}$ admet une extension continue $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f\right)^{[1],\mathbb{A}} := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\left(f^{[1],\mathbb{K}}\right)$, ce qui prouve que l'application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$ est de classe $\mathcal{C}^{[1]}$ sur $\mathbb{A}$. Par récurrence, l'application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$ est alors de classe $\mathcal{C}^{[\infty]}$ sur $\mathbb{A}$.

2. *Unicité de l'extension.* Fixons une $\mathbb{K}$-base $(a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{A}$ et écrivons un élément de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} U$ sous la forme $x + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ avec $x \in U$ et $v_i \in V$.

Soit F une extension lisse sur $\mathbb{A}$ de f. Comme F est lisse sur $\mathbb{A}$, nous pouvons utiliser le développement limité radial d'ordre $k + 1$ (sans terme constant car $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ est nilpotent d'ordre $k+1$), successivement pour chaque variable v_i, $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned}
& F\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \\
= \; & F\left(x + \sum_{i=2}^{n} a_i v_i + a_1 v_1\right) \\
= \; & \sum_{\alpha_1=0}^{k} a_1^{\alpha_1} \frac{d^{\alpha_1} F(x + \sum_{i=2}^{n} a_i v_i)(v_1, \ldots, v_1)}{\alpha_1!} \\
= \; & \sum_{\alpha_1=0}^{k} \sum_{\alpha_2=0}^{k-\alpha_1} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \frac{d^{\alpha_1+\alpha_2} F(x + \sum_{i=3}^{n} a_i v_i)(v_1, \ldots, v_1, v_2, \ldots, v_2)}{\alpha_1! \alpha_2!} \\
= \; & \sum_{0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n \leq k, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq k} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \frac{d^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} F(x)(v_1, \ldots, v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_k)}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \\
= \; & \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^k, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}} \frac{d^{|\boldsymbol{\alpha}|} F(x)(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}})}{\boldsymbol{\alpha}!},
\end{aligned}$$

puisque les évaluations de F et de ses dérivées directionnelles dans la direction de V, en les éléments de V dépendent seulement de sa restriction à V. Ainsi, nous obtenons

$$F\left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = F(x) + \sum_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} F(x), \tag{7.1.1}$$

En particulier, F est entièrement déterminée par sa restriction à $\sigma_U^{\mathbb{A}}(U)$. Or F est une extension donc $F \circ \sigma_U^{\mathbb{A}} = \sigma_W^{\mathbb{A}} \circ f$ est entièrement déterminée par f, ce qui prouve l'unicité. □

La formule 7.1.1 permet de décrire la structure des applications lisses sur toute algèbre de Weil $\mathbb{A}$.

Exemple 7.1.3. Pour $\mathbb{A} = \mathrm{T}^2\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\mathbb{K} \oplus \varepsilon_2\mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K}$, où $\varepsilon_1^2 = 0 = \varepsilon_2^2$, toute application $F : \mathrm{T}^2U \to \mathrm{T}^2W$ lisse sur $\mathrm{T}^2\mathbb{K}$ est de la forme suivante

$$\begin{aligned}
F(x + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_{12}) \; = \; & f(x) + \varepsilon_1 \left(df(x)v_1 + F_1(x)\right) + \varepsilon_2 \left(df(x)v_2 + F_2(x)\right) \\
& + \varepsilon_1\varepsilon_2 \left(df(x)v_{12} + \frac{d^2 f(x)(v_1, v_2)}{2} + F_{12}(x)\right),
\end{aligned}$$

si on suppose que 2 est inversible pour simplifier, où

$$F(x) =: f(x) + \varepsilon_1 F_1(x) + \varepsilon_2 F_2(x) + \varepsilon_1\varepsilon_2 F_{12}(x)$$

est la décomposition de F en applications $f, F_1, F_2, F_{12} : U \to V$. Si F est l'extension de l'application f à $\mathrm{T}^2\mathbb{K}$, alors $F(x) = f(x)$ pour tout x dans U, et F est de la forme suivante

$$\begin{aligned}
& F(x + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_{12}) \\
= \; & f(x) + \varepsilon_1 df(x)v_1 + \varepsilon_2 df(x)v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \left(df(x)v_{12} + \frac{d^2 f(x)(v_1, v_2)}{2}\right).
\end{aligned}$$

7.1.3 Les foncteurs de Weil du point de vue des variétés

Nous allons donner une interprétation en termes de variétés du résultat précédent. Rappelons que le théorème B.1.2 montre qu'une variété est entièrement déterminée par la donnée de :

1. un $\mathbb{K}$-module topologique V (l'espace modèle),
2. des ouverts $(V_{ij})_{i,j\in I} \subset V$, où I est un ensemble d'indices discret,
3. des applications $(\phi_{ij})_{i,j\in I}$ lisses sur $\mathbb{K}$ (les changements de cartes) qui satisfont les relations de cocycle

$$\phi_{ii} = \mathrm{id} \text{ et } \phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik} \quad \text{(là où elles sont définies).}$$

Si $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil, alors la catégorie $\mathcal{M}an_{\mathbb{A}}$ des variétés lisses sur $\mathbb{A}$ est bien définie.

Théorème 7.1.4. (Foncteurs de Weil sur les variétés) *Il existe un unique foncteur* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}an_{\mathbb{K}} \to \mathcal{M}an_{\mathbb{K}}$*, qui coïncide sur les ouverts* U *des* $\mathbb{K}$*-modules topologiques, avec l'association* $U \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U$*,* $f \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}f$ *décrite au théorème 7.1.2. De plus, ce foncteur est à valeurs dans* $\mathcal{M}an_{\mathbb{A}}$ *et préserve les produits cartésiens.*

Démonstration. Prouvons l'existence du foncteur. Le foncteur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ associe au $\mathbb{K}$-module topologique V, aux ouverts $V_{ij} \subset V$ et aux applications ϕ_{ij} lisses sur $\mathbb{K}$, le $\mathbb{A}$-module topologique $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}V$, les ouverts $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}V_{ij} \subset \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V$ et les applications $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\phi_{ij}$ lisses sur $\mathbb{A}$. Si M est une variété lisse sur $\mathbb{K}$, modelée sur V et d'atlas (V_{ij}, ϕ_{ij}), alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}V$ est un modèle et $(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}V_{ij}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\phi_{ij})$ est un atlas de variété lisse sur $\mathbb{A}$. En effet, comme $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ est un foncteur covariant, les applications $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\phi_{ij}$ vérifient encore les relations de cocycle. Avec ces données, nous pouvons construire une variété lisse sur $\mathbb{A}$, que l'on note $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.

La preuve de l'unicité du foncteur est immédiate, puisqu'une variété est entièrement déterminée par son modèle, ses ouverts et ses changements de cartes, d'après le théorème B.1.2. $\square$

La variété $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ ainsi définie est appelée *variété* $\mathbb{A}$*-tangente de* M ou *variété* M *étendue à* $\mathbb{A}$. Plus généralement, ces variétés sont appelées *variétés de Weil*.

7.2 Fonctorialité des foncteurs de Weil en les algèbres de Weil

La construction des foncteurs de Weil est non seulement fonctorielle en les variétés, mais également en les algèbres de Weil. Ainsi, tout morphisme d'algèbres de Weil induit un difféomorphisme entre variétés de Weil. De plus, tout morphisme d'algèbres de Weil induit une nouvelle structure différentielle sur les variétés de Weil. Ceci permet de faire le lien entre des notions purement algébriques et des notions de géométrie différentielle.

7.2.1 Préliminaire : structures différentiables

Nous allons étudier les structures différentiables induites sur les variétés lisses par un morphisme entre deux anneaux de base admissibles. En particulier, nous appliquerons à la section suivante nos résultats au cas où ce morphisme est un morphisme d'algèbres de Weil.

Théorème 7.2.1. *Soit $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un morphisme d'anneaux topologiques de base admissibles. Soit E une variété lisse sur $\mathbb{B}$. Alors E admet une structure de variété lisse sur $\mathbb{A}$. De plus, toute application lisse sur $\mathbb{B}$ entre deux variétés lisses sur $\mathbb{B}$ est également lisse sur $\mathbb{A}$ pour cette nouvelle structure.*

Démonstration. E est une variété lisse sur $\mathbb{A}$ car elle est modelée sur un $\mathbb{B}$-module qui hérite d'une structure de $\mathbb{A}$-module par Φ et parce que les changements de cartes de variété sont lisses sur $\mathbb{A}$, d'après le théorème 3.1.5. □

À nouveau, la lissité par rapport à $\mathbb{A}$ peut ainsi s'interpréter comme la restriction à l'anneau de base admissible $\Phi(\mathbb{A}) \subset \mathbb{B}$ de la lissité par rapport à $\mathbb{B}$.

Exemple 7.2.2. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. En appliquant le théorème précédent à la projection $\pi^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$, nous obtenons que toute variété lisse sur $\mathbb{K}$ est également une variété lisse sur $\mathbb{A}$, « de façon triviale », c'est-à-dire que $\mathring{\mathbb{A}}$ n'agit pas.

Notez que, si $\mathbb{B} = \mathbb{A}$, et si Φ est un endomorphisme de $\mathbb{A}$, alors toute variété $\mathbb{A}$-lisse admet deux structures de variétés lisses sur $\mathbb{A}$. Lorsque ce sera nécessaire, nous noterons un indice Φ pour faire référence à la structure induite par Φ.

Remarque 7.2.3. Soit E une variété lisse sur $\mathbb{A}$. Si l'application $F : E \to E$ est lisse sur $\mathbb{A}$, alors l'application $F : E \to E_\Phi$ n'est pas lisse sur $\mathbb{A}$ en général mais l'application $F : E_\Phi \to E_\Phi$ l'est.

7.2.2 Applications induites

Théorème 7.2.4. *La construction faite au théorème 7.1.4 est fonctorielle en $\mathbb{A}$: si $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil, alors Φ définit de manière canonique et fonctorielle, pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, une application $\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$, lisse sur $\mathbb{A}$ pour la structure $\mathbb{A}$-différentiable de $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ induite par Φ, telle que, pour toute application $f : M \to N$ lisse sur $\mathbb{K}$, le diagramme suivant commute*

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}}f \circ \Phi_M = \Phi_N \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}f \quad : \quad \begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f"] \arrow[d, "\Phi_M"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \arrow[d, "\Phi_N"] \\ \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \arrow[r, "\mathrm{T}^{\mathbb{B}}f"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N \end{tikzcd} .$$

Démonstration. Pour un ouvert $U \subset V$, nous définissons

$$\Phi_U : V \otimes \mathbb{A} \supset \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \to V \otimes \mathbb{B}, \quad x \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i \mapsto x \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \Phi(a_i).$$

Cette application est $\mathbb{A}$-linéaire pour la structure de $\mathbb{A}$-module de $V \otimes \mathbb{B}$ induite par Φ, et continue et par conséquent, elle est lisse sur $\mathbb{A}$ d'après le théorème A.2.4, pour la structure de $\mathbb{A}$-variété de $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ décrite au théorème 7.2.1. En particulier, la collection des applications $\Phi_U : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}U$, pour des domaines de cartes U, induit une application lisse $\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ bien définie car Φ_U commute avec l'extension scalaire des polynômes ($P_{\mathbb{B}} \circ \Phi_U = \Phi_W \circ P_{\mathbb{A}}$), et donc commute également avec les applications étendues, et, par suite, avec les changements de cartes. Le même argument montre l'égalité

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}}f \circ \Phi_M = \Phi_N \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}f.$$

□

Exemple 7.2.5. Le morphisme $\pi^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ d'une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil sur sa partie finie induit, pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, une application $\pi^{\mathbb{A}}_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$.

Exemple 7.2.6. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. La section $\sigma^{\mathbb{A}} : \mathbb{K} \to \mathbb{A}$ induit, pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, une application $\sigma^{\mathbb{A}}_M : M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.

Exemple 7.2.7. Le flip d'une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$

$$\tau^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \to \mathbb{A} \otimes \mathbb{A}, \quad a \otimes a' \mapsto a' \otimes a$$

induit, pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, le flip canonique $\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}$-lisse $\tau^{\mathbb{A}}_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}_{\tau}M$. Notez que les deux structures de variété lisse sur $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}$ sont différentes. Le flip n'est pas un $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-difféomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}M$, et n'est pas non plus un $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-difféomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}_{\tau}M$. En revanche, c'est bien sûr toujours un $\mathbb{K}$-difféomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}M$.

Exemple 7.2.8. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}$ est également une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Considérons le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil

$$\mu^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad a \otimes a' \mapsto aa'.$$

Pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, l'application induite $\mu^{\mathbb{A}}_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est lisse sur $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}$.

Exemple 7.2.9. Soit Φ un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Alors $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ est également une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Considérons le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil suivant

$$\mu^{\Phi} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \to \mathbb{B}, a \otimes b \mapsto \Phi(a)b.$$

Pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, l'application $\mu^{\Phi}_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ est lisse sur $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.

7.2.3 Les automorphismes canoniques

Le théorème 7.2.4 implique immédiatement que le groupe de Galois $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ agit canoniquement par certains automorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, appelés *automorphismes canoniques* :

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A}) \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \quad (\Phi, u) \mapsto \Phi_M(u)\,.$$

Cette action commute avec l'action naturelle du groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M)$:

$$\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M) \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \quad (f, u) \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}f(u)\,.$$

Voici une liste d'exemples importants d'automorphismes canoniques. Elle correspond aux exemples 6.2.3.

Exemple 7.2.10. Pour tout r dans $\mathbb{K}^{\times}$, l'automorphisme canonique

$$\mathrm{T}\mathbb{K} \to \mathrm{T}\mathbb{K}, \quad x + \varepsilon y \mapsto x + \varepsilon r y$$

induit l'application $\mathrm{T}M \to \mathrm{T}M$ qui correspond à la multiplication par le scalaire r dans chaque espace tangent. Cet exemple se généralise dans deux directions décrites dans les exemples suivants.

Exemple 7.2.11. Par récurrence, l'exemple précédent donne lieu à une action $(\mathbb{K}^\times)^k$ par automorphismes sur les variétés tangentes itérées $\mathrm{T}^k M$. L'action du sous-groupe diagonal $\mathbb{K}^\times$ donne alors l'action cubique $\rho_{[\cdot]}$ de $\mathbb{K}^\times$.

Exemple 7.2.12. Les automorphismes

$$\mathrm{J}^k\mathbb{K} \to \mathrm{J}^k\mathbb{K}, \quad P(X) \mapsto P(rX),$$

où r appartient à $\mathbb{K}^\times$, induisent une action de $\mathbb{K}^\times$ par automorphismes sur $\mathrm{J}^k M$.

Exemples 7.2.13.

1. Le flip

$$\mathrm{TT}\mathbb{K} \to \mathrm{TT}\mathbb{K}, \quad x + \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 y_{12} \mapsto x + \varepsilon_1 y_2 + \varepsilon_2 y_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 y_{12}$$

induit un difféomorphisme canonique sur $\mathrm{TT}M$, également appelé le *flip*. Par récurrence, nous obtenons une action du groupe symétrique Σ_k sur $\mathrm{T}^k M$.

2. De manière analogue, pour toute $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$, l'application

$$\tau^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \to \mathbb{A} \otimes \mathbb{A}, \quad a \otimes a' \mapsto a' \otimes a$$

est un automorphisme appelé le *flip généralisé*. Le difféomorphisme canonique correspondant

$$\tau^{\mathbb{A}}_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}} M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}} M$$

est également appelé le *flip généralisé*.

Pour toute algèbre graduée $\mathbb{A}$, l'application R_a définie au théorème 6.5.6 induit des morphismes sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$.

Proposition 7.2.14. *Soit $\mathbb{A}$ une algèbre de Weil graduée. Pour tout élément a dans $\mathbb{A}$, il existe un endomorphisme induit par R_a sur toute variété de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$, et c'est un automorphisme si et seulement si a est dans $\mathbb{A}^\times$.*

7.2.4 Commutateur

Proposition 7.2.15. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Alors le groupe des $\mathbb{A}$-difféomorphismes $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M)$ est stable sous l'action par conjugaison de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$.*

Démonstration. Soit Ψ un automorphisme d'une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$. Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Soit F un $\mathbb{A}$-difféomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$. Alors l'application $\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \arrow[r, "\Psi_M"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{\Psi} M \arrow[d, "F"] \\ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{\Psi} M \arrow[l, "\Psi_M^{-1}"] \end{tikzcd}$$

est un $\mathbb{A}$-difféomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$, d'après les théorèmes 7.2.1 et 7.2.4. □

Corollaire 7.2.16. *Le groupe commutateur $[\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A}), \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M)]$ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M)$.*

7.3 Variétés de Weil des groupes de Lie

Montrons que la structure de groupe de Lie est préservée lorsque nous appliquons un foncteur de Weil.

Définition 7.3.1. *Un* groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ *est un groupe muni d'une structure de variété lisse sur* $\mathbb{K}$ *telle que la multiplication* $m : G \times G \to G$ *et l'inversion* $i : G \to G$ *soient lisses sur* $\mathbb{K}$. *Un* morphisme de groupes de Lie sur $\mathbb{K}$ *est un morphisme de groupes* $f : H \to G$ *lisse sur* $\mathbb{K}$.

Théorème 7.3.2. *Soient* G *un groupe de Lie sur* $\mathbb{K}$, *d'élément neutre* $e = e_G$, *et* $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *Le foncteur de Weil* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ *est un foncteur de la catégorie des groupes de Lie sur* $\mathbb{K}$ *dans celle des groupes de Lie sur* $\mathbb{A}$ *:* $G^{\mathbb{A}} := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ *est un groupe de Lie sur* $\mathbb{A}$, *appelé* groupe $\mathbb{A}$-tangent de G, *et si* $f : H \to G$ *est un morphisme de groupes de Lie sur* $\mathbb{K}$, *alors* $f^{\mathbb{A}} := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}f : H^{\mathbb{A}} \to G^{\mathbb{A}}$ *est un morphisme de groupes de Lie sur* $\mathbb{A}$.
2. *Tout morphisme* $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *de* $\mathbb{K}$*-algèbres de Weil induit un morphisme* $\Phi_G : G^{\mathbb{A}} \to G^{\mathbb{B}}$ *de groupes de Lie sur* $\mathbb{K}$ *(qui est également un morphisme de groupes de Lie sur* $\mathbb{A}$ *si on considère la structure de* $\mathbb{A}$*-algèbre de* $\mathbb{B}$ *via* Φ*). En particulier, le groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ *agit par automorphismes sur* $G^{\mathbb{A}}$.

Démonstration.

1. Il suffit d'appliquer le foncteur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ au groupe G, d'élément neutre e, son produit m et à l'inversion i pour obtenir un groupe $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$, d'élément neutre $0_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e G} = \sigma^{\mathbb{A}}_G(e)$ de produit $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}m$ et d'inversion $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}i$.
2. C'est immédiat.

□

Troisième partie

Les fibrés de Weil

Chapitre 8

Fibrés $\mathbb{A}$-tangents de Weil

Soient M une variété lisse sur $\mathbb{K}$, et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Nous avons montré dans la partie précédente que la variété $\mathbb{A}$-tangente $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ possède une structure de variété lisse sur $\mathbb{A}$. En fait, $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ possède une structure de fibré sur M, noté $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$. Ce fibré est un fibré *polynomial*, c'est-à-dire que les changements de cartes sont des applications polynomiales fibre à fibre. De plus, les changements de cartes sont sans terme constant, ce qui munit chaque fibre d'un *point de base* canonique. Ceci implique l'existence d'une section naturelle, appelée *section nulle*, et notée $\sigma_M^{\mathbb{A}} : M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.

Ce fibré est un fibré $\mathbb{A}$-lisse, pour la lissité sur $\mathbb{A}$ de M obtenue par restriction scalaire de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{K}$. Nous étudions la structure des applications lisses sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes et montrons que toute application $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ lisse sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes induit une application

$$f := \pi_N^{\mathbb{A}} \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} : M \to N \tag{8.0.1}$$

telle que (F, f) soit un morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses, ce qui se traduit par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_M^{\mathbb{A}}"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \arrow[d, "\pi_N^{\mathbb{A}}"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, toute application $f : M \to N$ lisse sur $\mathbb{K}$ se relève de manière unique en une application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ lisse sur $\mathbb{A}$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \\
M \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "\sigma_M^{\mathbb{A}}"] & N \arrow[u, "\sigma_N^{\mathbb{A}}"']
\end{tikzcd} \tag{8.0.2}$$

de sorte que $(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f, f)$ soit un morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses qui commute avec les sections. On parle de *morphisme de fibrés avec sections.*

Une fois la structure du fibré analysée, nous considérons son groupe des automorphismes. Nous prouvons que l'ensemble $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ des sections du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est muni d'une structure de groupe, isomorphe au groupe $\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$ des difféomorphismes du fibré

$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ qui préservent les fibres. Puis nous montrons que le groupe $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$ des $\mathbb{A}$-difféomorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est le produit semi-direct du groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ des sections de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et du groupe $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M)$ des $\mathbb{K}$-difféomorphismes sur M. Pour cela, nous montrons que la suite de groupes suivante est exacte scindée

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M) \arrow[r, hook] & \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd} ,$$

où l'injection correspond à l'isomorphisme entre $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ et $\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$, où la surjection est l'application $F \mapsto f$ décrite en (8.0.1), et où la section correspond à (8.0.2).

Si la variété G possède une structure supplémentaire de groupe de Lie, alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ possède également une structure de groupe de Lie, dont nous étudierons l'algèbre de Lie.

Nous terminons ce chapitre par un résultat fondamental : le lien entre les constructions algébriques sur les algèbres de Weil et les constructions sur les fibrés de Weil associés. Nous montrons en particulier que le fibré de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A}\oplus_{\mathbb{K}}\mathbb{B}}M$ associé à la somme de Whitney de deux algèbres de Weil $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ correspond au produit fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ sur M et que le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}M$ associé au produit tensoriel de deux algèbres de Weil $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ correspond à la composition $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{B}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\right) M$.

8.1 Fibrés $\mathbb{A}$-tangents

8.1.1 Lissité et polynomialité

Les généralités sur les fibrés, notamment les définitions des fibrés lisses sur $\mathbb{K}$ et des fibrés polynomiaux, sont données dans l'annexe B.

Nous avons déjà mentionné que, dans le cas de l'anneau tangent $\mathbb{A} = \mathrm{T}\mathbb{K}$, le foncteur de Weil est un *foncteur vectoriel*, c'est-à-dire un foncteur qui associe à chaque variété M un fibré vectoriel sur M : le fibré tangent $\mathrm{T}M$. Il est facile de montrer que c'est un fibré lisse sur $\mathbb{K}$. Il existe en fait sur ce fibré une structure différentiable plus forte que la lissité sur $\mathbb{K}$: l'espace total $\mathrm{T}M$ est lui-même une variété lisse sur $\mathrm{T}\mathbb{K}$. De même, nous montrerons que les fibrés $\mathbb{A}$-tangents $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ sont des fibrés $\mathbb{A}$-lisses, où l'on considère (par *restriction scalaire* de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{K}$) la base M comme variété $\mathbb{A}$-lisse. La structure vectorielle des fibres de $\mathrm{T}M$ se généralise en une structure polynomiale des fibres de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, de degré la hauteur de l'algèbre de Weil $\mathbb{A}$.

Théorème 8.1.1 (Les fibrés $\mathbb{A}$-tangents)**.** *Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$, modelée sur V et $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil de hauteur k. Alors $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est un fibré $\mathbb{A}$-lisse et $\mathbb{A}$-polynomial de degré k sans terme constant, sur M, de fibre type $V_{\mathring{\mathbb{A}}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathring{\mathbb{A}}$. Ce fibré est appelé* fibré $\mathbb{A}$-tangent de M.

Comme $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré polynomial sans terme constant, il possède une section naturelle, dite *section nulle* : $\sigma_M^{\mathbb{A}}$. On notera $0_x^{\mathbb{A}} := \sigma_M^{\mathbb{A}}(x)$ le point de base ou $\mathbb{A}$-*vecteur nul* de $\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M$. On notera également $0_M^{\mathbb{A}}$ le sous-ensemble $\sigma_M^{\mathbb{A}}(M)$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Notez qu'en particulier, si $\mathring{\mathbb{A}}$ est nilpotent d'ordre 2, alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré vectoriel sur M.

Démonstration. 1. *Lissité sur* $\mathbb{A}$. Nous avons vu au théorème 7.1.4 que $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est une variété lisse sur $\mathbb{A}$. D'après le théorème 7.2.1, les morphismes d'algèbres de Weil $\pi^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ et sa section $\sigma^{\mathbb{A}} : \mathbb{K} \to \mathbb{A}$ induisent respectivement l'application $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$, lisse sur

$\mathbb{A}$, et sa section $\sigma_M^{\mathbb{A}} : M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, lisse sur $\mathbb{K}$. La structure de variété $\mathbb{A}$-lisse de M est obtenue par *restriction scalaire* de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{K}$, c'est-à-dire que c'est la structure induite par la projection $\pi^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$.

2. *Trivialité locale.* Montrons que ce fibré est bien localement trivial, de fibre type $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$, et que les changements de cartes de fibré sont polynomiaux en les fibres. L'atlas de fibré est déterminé par le $\mathbb{K}$-atlas (U_i, ϕ_i) de variété de M et par les $\mathbb{A}$-difféomorphismes
$$\alpha_i : \left(\pi^{\mathbb{A}}\right)^{-1}(U_i) = U_i \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \to V_i \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}},$$
$$\left(x, x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}f\left(x, x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) = \left(f(x), \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\left(x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)\right).$$
$\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est donc bien un fibré $\mathbb{A}$-lisse sur la base M.

3. *Polynomialité.* Les applications
$$V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \to V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}, \quad x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \mapsto \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\left(x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)$$
sont $\mathbb{A}$-polynomiales de degré au plus k et sans terme constant. Elles définissent par conséquent un fibré $\mathbb{A}$-polynomial de degré k sans terme constant sur M. En particulier, si $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ est nilpotent d'ordre 2, alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est un fibré polynomial de degré 1 sans terme constant, c'est-à-dire un fibré vectoriel.

□

Exemples 8.1.2. Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$.

1. Le fibré tangent itéré k fois T^kM est un fibré polynomial de degré k sur M. En particulier, le fibré tangent $\mathrm{T}M$ est un fibré vectoriel.
2. Le fibré des k-jets J^kM est un fibré polynomial de degré k sur M.
3. Le fibré $\mathbb{W}_n^kM$ des (k,n)-vitesses est un fibré polynomial de degré k sur M.

8.1.2 Groupes structuraux

Rappelons (voir la définition B.3.1) ce qu'est un groupe structural pour un fibré $\pi : E \to M$ lisse sur $\mathbb{K}$, avec atlas, de fibre type F. On dit qu'un groupe G, muni d'une action $\rho : G \to \mathrm{Bij}(F)$ est un *groupe structural du fibré* $E \to M$ si et seulement si $\rho(G) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$ et si les changements de cartes de fibré sont fibre à fibre des éléments de $\rho(G)$. Le *groupe structural maximal* est le groupe $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$. Le *groupe structural minimal* $G_{\min}$ est le groupe engendré par les (restrictions aux fibres des) changements de cartes. Notez que le groupe structural minimal dépend de l'atlas de fibré, alors que le groupe structural maximal n'en dépend pas. Les actions de ces deux groupes sur la fibre type F sont les actions naturelles. Ainsi, les groupes structuraux sont les groupes G munis d'une action ρ sur F tels
$$G_{\min} \subset \rho(G) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F).$$
Nous allons considérer dans cette section des groupes structuraux du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$, afin de mieux comprendre sa structure. Dans toute la suite, k désigne la hauteur de $\mathbb{A}$.

Exemples 8.1.3. Considérons le fibré tangent $\mathrm{T}M$ sur M. Alors les groupes suivants, munis de leurs actions naturelles sur la fibre type V, sont des groupes structuraux du fibré tangent :

1. Le groupe structural minimal $G_{\min}$, engendré par les différentielles des changements de cartes de variété de M (la restriction à la fibre en un point x d'un changement de carte φ est la différentielle de φ au point x).
2. Le groupe général linéaire $\mathrm{GL}(V)$.
3. Le groupe affine $\mathrm{GA}(V)$, qui est produit semi-direct du groupe abélien des translations de V et du groupe $\mathrm{GL}(V)$.
4. Le groupe structural maximal $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(V)$.

La fibre type du fibré $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \simeq \mathrm{T}_0^{\mathbb{A}}V$.

Proposition 8.1.4. *Soient $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Alors le groupe $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^k(V)_0$ (voir définition A.2.1) est un groupe structural du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ (muni de l' atlas obtenu par extension d'un atlas de variété de M), pour l'action ρ définie par*

$$\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^k(V)_0 \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \to V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}, \quad (P, \boldsymbol{v}) \mapsto \rho(P)\boldsymbol{v} := P_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}(\boldsymbol{v}).$$

Rappelons que le groupe $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^k(V)_0$ est le groupe des applications $\mathbb{K}$-polynomiales de V dans V, de degré au plus k et sans terme constant, et inversibles pour la loi de composition tronquée à l'ordre k.

Démonstration. Les changements de cartes de fibré de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ sont de la forme

$$U \times V \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}} \to U \times V \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}, \quad \left(x, \boldsymbol{v}_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) \mapsto \left(\varphi(x), \left(\mathrm{Tay}_x^k\varphi\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\left(\boldsymbol{v}_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)\right),$$

où φ est un changement de carte de variété de M. Leurs restrictions en un point x de M sont de la forme

$$V \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}} \to V \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}, \quad \boldsymbol{v}_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \mapsto \left(\mathrm{Tay}_x^k\varphi\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\left(\boldsymbol{v}_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right).$$

et correspondent à l'extension $\left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$ du polynôme de Taylor $\mathrm{Tay}_x^k f$ d'ordre k des changements de cartes (inversibles) de variété de la base M. Or un tel polynôme est lui-même inversible, de degré k et sans terme constant. Ainsi, $\rho\left(\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^k(V)_0\right)$ contient bien le groupe structural minimal. Notez que ceci est vrai quel que soit l'atlas de fibré de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ obtenu par extension d'un atlas de variété de M. De plus, les extensions à $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ des applications $\mathbb{K}$-polynomiales continues sur V sont $\mathbb{A}$-polynomiales continues d'après le théorème A.3.1 et donc lisses sur $\mathbb{A}$ d'après le théorème A.2.4, ce qui prouve que le groupe $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^k(V)_0$ agit de manière $\mathbb{A}$-lisse, c'est-à-dire que $\rho\left(\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^k(V)_0\right)$ est contenu dans $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}\left(V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)$. □

Exemples 8.1.5.
1. Pour $\mathbb{A} = \mathrm{T}\mathbb{K}$, le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est le fibré tangent $\mathrm{T}M$. Le groupe $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^1(V)_0$ est le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ de la fibre type V.
2. Pour $\mathbb{A} = \mathrm{T}^2\mathbb{K}$, le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est le fibré double tangent $\mathrm{TT}M$. Le groupe $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^2(V)_0$ est le groupe polynomial de degré 2 sans terme constant de la fibre type V. Si 2 est inversible dans $\mathbb{K}$, ce groupe se décompose de la manière suivante :

$$\mathrm{GP}^2(V)_0 = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{Bil}(V \times V, V).$$

Son action sur la fibre type est la suivante :

$$\Big(\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{Bil}(V \times V, V)\Big) \times V \otimes \mathrm{T}^{\overset{\circ}{2}}\mathbb{K} \to V \otimes \mathrm{T}^{\overset{\circ}{2}}\mathbb{K},$$

$$\Big((L, b), (\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_{12})\Big) \mapsto \Big(\varepsilon_1 L(v_1) + \varepsilon_2 L(v_2) + \varepsilon_1\varepsilon_2 \left(L(v_{12}) + b(v_1, v_2)\right)\Big).$$

Les fonctions de transition sont déterminées par :

$$U \to \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{Bil}(V \times V, V), \quad x \mapsto \left(df(x), \frac{d^2 f(x)}{2}\right).$$

Corollaire 8.1.6. *Soient $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Alors le groupe $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})_{V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}}$ des applications $\mathbb{A}$-polynomiales qui préservent $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$ est un groupe structural du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ pour l'action ρ' par restriction suivante*

$$\mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})_{V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}} \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \to V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}, \quad (P, \boldsymbol{v}) \mapsto \rho'(P)\boldsymbol{v} := P_{|V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}}(\boldsymbol{v}).$$

Démonstration. Ce groupe agit clairement de manière $\mathbb{K}$-lisse. De plus, la proposition A.4.1 montre que le groupe $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})_{V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}}$ est produit semi-direct du groupe $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)_0$ et du groupe $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V, V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)$ et donc en particulier contient $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)_0$. Finalement, nous obtenons

$$G_{\min} \subset \rho\left(\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)_0\right) \subset \rho'\left(\mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})_{V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}}\right) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}\left(V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right).$$

□

Exemple 8.1.7. Pour $\mathbb{A} = \mathrm{T}\mathbb{K}$, le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ est le fibré tangent $\mathrm{T}M$. Le groupe $\mathrm{GP}^1_{\mathbb{K}}(V_{\mathbb{A}})_{V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}}$ est le groupe affine $\mathrm{GA}(V)$ de la fibre type V.

Le groupe $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})_{V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}}$ est une généralisation du groupe affine, au sens où il est produit semi-direct du groupe polynomial sans terme constant $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)_0$, qui généralise le groupe linéaire, et du groupe $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V, V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)$, qui généralise le groupe des translations. Cependant, ce dernier groupe n'est pas commutatif en général.

8.1.3 Morphismes de fibrés $\mathbb{A}$-tangents

Le théorème ci-dessous décrit la structure des applications lisses sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes. Il montre que toute application lisse sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes induit un morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses et que tout morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes est $\mathbb{A}$-polynomial fibre à fibre.

Théorème 8.1.8. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Soient M et N deux variétés lisses sur $\mathbb{K}$. Soit $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ une application lisse sur $\mathbb{A}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *F préserve les fibres sur M et N, c'est-à-dire qu'il existe une unique application f dans $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{K}}(M,N)$ telle que F soit* sur *f, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi^{\mathbb{A}}_M"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \arrow[d, "\pi^{\mathbb{A}}_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

2. *F agit de manière $\mathbb{A}$-polynomiale fibre à fibre, éventuellement avec terme constant.*
3. *F est entièrement déterminée par sa valeur sur $\sigma^{\mathbb{A}}_M(M)$ et vérifie*

$$F = \mu^{\mathbb{A}}_N \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(F \circ \sigma^{\mathbb{A}}_M),$$

où $\mu^{\mathbb{A}}_N : \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}N \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ est l'application lisse sur $\mathbb{A}$ définie dans l'exemple 7.2.8, induite par le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil $\mu^{\mathbb{A}} : \mathbb{A}\otimes\mathbb{A} \to \mathbb{A}, a\otimes a' \mapsto aa'$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}M \arrow[r, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}N \arrow[d, "\mu^{\mathbb{A}}_N"] \\ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[u, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\sigma^{\mathbb{A}}_M"] \arrow[r, "F"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \end{tikzcd}$$

(F,f) est alors un morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses.

Démonstration. Notons k la hauteur de $\mathbb{A}$. Fixons une $\mathbb{K}$-base $(a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{A}$. Dans une carte, on écrit un élément de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U$, où $U \subset V$, sous la forme $x + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ avec $x \in U$ et $v_i \in V$. D'après le point (4) de la preuve du théorème 7.1.2, nous obtenons l'équation (7.1.1) :

$$F\left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = F(x) + \sum_{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}|\leq k} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}} D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} F(x).$$

Or, d'après le théorème 5.1.3, pour tout multi-indice $\boldsymbol{\alpha}$, l'application $\boldsymbol{v} \mapsto D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} F(x)$ est $\mathbb{A}$-polynomiale, multi-homogène de multi-degré $\boldsymbol{\alpha}$ donc est polynomiale de degré $|\boldsymbol{\alpha}| \leq k$. En décomposant $F \circ \sigma^{\mathbb{A}}_M$ par rapport à la $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{A}$, c'est-à-dire, en écrivant

$$F \circ \sigma^{\mathbb{A}}_M(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i F_i(x),$$

où F_i est une application de U dans $V \otimes 1 \simeq V$, alors la formule prend la forme suivante :

$$F\left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i F_i(x) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}|\leq k} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}} a_i D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} F_i(x), \tag{8.1.1}$$

où $F_0 =: f = \pi^{\mathbb{A}}_N \circ F \circ \sigma^{\mathbb{A}}_M$ est une application lisse sur $\mathbb{K}$. Ainsi, F envoie la fibre au point x dans la fibre au point $f(x)$. Finalement, F agit fibre à fibre et de manière $\mathbb{A}$-polynomiale en les fibres, de degré au plus k, le terme constant correspondant à la fibre en x étant donné par $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(x)$.

La formule (7.1.1) montre également que toute application F lisse sur $\mathbb{A}$ entre $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ ne dépend que de sa valeur sur $\sigma_M^{\mathbb{A}}(M)$:

$$F = \mu_N^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \left(F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} \right).$$

En effet, dans des cartes U de M et W de N, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(F \circ \sigma_U^{\mathbb{A}}) \left(x \otimes 1 + \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_i \right) &= F(x) \otimes 1 + \sum_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} F(x) \otimes \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}} \\ = \quad f(x) \otimes 1 \otimes 1 + \sum_{i=1}^n F_i(x) \otimes a_i \otimes 1 &+ \sum_{i=0}^n \sum_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} F_i(x) \otimes a_i \otimes \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\mu_W^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \left(F \circ \sigma_U^{\mathbb{A}} \right) \left(x + \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_i \right) \\ = \quad & f(x) \otimes 1 + \sum_{i=1}^n F_i(x) \otimes a_i + \sum_{i=0}^n \sum_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} F_i(x) \otimes a_i \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}. \end{aligned}$$

□

En particulier, le point (3) montre que l'application

$$\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{\infty}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N) \to \mathcal{C}_{\mathbb{K}}^{\infty}(M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N), \quad F \mapsto F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} \tag{8.1.2}$$

est un isomorphisme, d'inverse $f \mapsto \mu_N^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$.

Exemple 8.1.9. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau double tangent $\mathrm{T}^2\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\mathbb{K} \oplus \varepsilon_2\mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_i^2 = 0$. Alors toute application $F : \mathrm{T}^2U \to \mathrm{T}^2W$ lisse sur $\mathrm{T}^2\mathbb{K}$ est de la forme

$$\begin{aligned} F(x + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_{12}) \quad &= \quad f(x) + \varepsilon_1 \left(df(x)v_1 + F_1(x) \right) + \varepsilon_2 \left(df(x)v_2 + F_2(x) \right) \\ &\quad + \varepsilon_1\varepsilon_2 \left(df(x)v_{12} + \frac{d^2 f(x)(v_1, v_2)}{2} + F_{12}(x) \right), \end{aligned}$$

si on suppose que 2 est inversible pour simplifier, où

$$F(x) =: f(x) + \varepsilon_1 F_1(x) + \varepsilon_2 F_2(x) + \varepsilon_1\varepsilon_2 F_{12}(x)$$

est la décomposition de F en applications $f, F_1, F_2, F_{12} : U \to V$. On retrouve ainsi la partie polynomiale de degré 2 $df(x)v_{12} + d^2 f(x)(v_1, v_2) + F_{12}(x)$, composée de la partie bilinéaire $\dfrac{d^2 f(x)(v_1, v_2)}{2}$, de la partie linéaire $df(x)v_{12}$ et de la partie translation $F_{12}(x)$.

8.1.4 Morphismes de fibrés $\mathbb{A}$-tangents avec sections

Le théorème suivant prouve l'unicité de l'extension des applications lisses sur $\mathbb{K}$ en des applications lisses sur $\mathbb{A}$. Plus précisément, il montre que toute application f lisse sur $\mathbb{K}$, entre deux variétés lisses sur $\mathbb{K}$, se relève de manière unique en un morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses avec sections entre les fibrés $\mathbb{A}$-tangents.

Théorème 8.1.10. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Soient M et N deux variétés lisses sur $\mathbb{K}$. Soit $f : M \to N$ une application lisse sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f$ est l'unique application $\mathbb{A}$-lisse $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}} N$ sur f telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \arrow[r, "F"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}} N \\
M \arrow[u, "\sigma^{\mathbb{A}}_M"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[u, "\sigma^{\mathbb{A}}_N"']
\end{tikzcd}$$

$(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f, f)$ est alors un morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses avec sections. De plus, ce morphisme est polynomial fibre à fibre et ce, sans terme constant.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 7.1.2. □

Finalement, tout morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes est polynomial fibre à fibre, et est de plus sans terme constant si et seulement si c'est un morphisme avec sections.

Exemples 8.1.11.

1. Pour $\mathbb{A} = \mathrm{T}\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \oplus \varepsilon \mathbb{K}$, avec $\varepsilon^2 = 0$, toute application $F : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$ lisse sur $\mathrm{T}\mathbb{K}$ et qui commute avec les sections est de la forme

$$F(x + \varepsilon v) = F(x) + \varepsilon df(x)v = f(x) + \varepsilon \left(df(x)v\right).$$

On retrouve ainsi pour chaque fibre en x la partie polynomiale de degré 1 sans terme constant (linéaire) $df(x)v$.

2. Pour $\mathbb{A} = \mathrm{T}^2\mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1 \mathbb{K} \oplus \varepsilon_2 \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2$, avec $\varepsilon_i^2 = 0$, toute application $F : \mathrm{T}^2 M \to \mathrm{T}^2 N$ lisse sur $\mathrm{T}^2\mathbb{K}$ et qui commute avec les sections est de la forme

$$\begin{aligned} F(x + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_{12}) &= f(x) + \varepsilon_1 \left(df(x)v_1\right) + \varepsilon_2 \left(df(x)v_2\right) \\ &\quad + \varepsilon_1\varepsilon_2 \Big(df(x)v_{12} + d^2 f(x)(v_1, v_2)\Big). \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la partie polynomiale de degré 2 sans terme constant $df(x)v_{12} + d^2 f(x)(v_1, v_2)$.

Notez que, contrairement à l'exemple 8.1.9, les applications F_1, F_2 et F_{12} sont nulles.

8.1.5 Unicité des foncteurs de Weil

Rappelons qu'un foncteur $\mathcal{M}an \to \mathcal{B}un$ est dit *fibré* si c'est une section du foncteur canonique $\mathcal{B}un \to \mathcal{M}an$ qui projette un fibré sur sa base.

Théorème 8.1.12. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}an_{\mathbb{K}} \to \mathcal{S}\mathcal{B}un^{\mathbb{A}}_{\mathbb{K}}$ est l'unique foncteur fibré dans la catégorie des fibrés $\mathbb{A}$-lisses avec sections qui coïncide sur les ouverts U des $\mathbb{K}$-modules topologiques avec l'association $U \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}} U = U \times \underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}}$.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ est bien un tel foncteur. L'unicité est une conséquence directe du théorème 7.1.4 et de l'unicité du relèvement des applications $\mathbb{K}$-lisses en morphismes de fibrés $\mathbb{A}$-lisses avec sections vue au théorème précédent. □

8.2 Groupes des difféomorphismes des fibrés $\mathbb{A}$-tangents

Le but de cette section est de prouver d'une part que l'ensemble $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ des sections du fibré $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ possède une structure de groupe, et, d'autre part, que le groupe des $\mathbb{A}$-difféomorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est produit semi-direct du groupe des $\mathbb{K}$-difféomorphismes de M et du groupe des sections $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$.

8.2.1 Groupe des sections

Soient $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et M une variété lisse sur $\mathbb{K}$.

Dans le cas où $\mathbb{A} = \mathbb{K}[X]/\left(X^2\right)$, c'est-à-dire dans le cas du foncteur tangent T, l'ensemble des champs de vecteurs sur M, c'est-à-dire des sections de $\mathrm{T}M \to M$, possède une structure naturelle de groupe commutatif, isomorphe au groupe des translations fibre à fibre dans le fibré tangent. Nous allons donner une généralisation de cet ensemble pour toute algèbre de Weil $\mathbb{A}$ et nous allons montrer que l'ensemble $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ des sections de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ possède également une structure de groupe, non commutatif en général.

Considérons l'application

$$\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N) \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{K}}(M, N), \quad F \mapsto f := \pi_N^{\mathbb{A}} \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}},$$

décrite au théorème 8.1.8, et qui est compatible avec la composition. Dans le cas où $M = N$, l'ensemble $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{K}}(M, M)$ possède une structure de monoïde d'élément neutre id_M. Une question naturelle est alors de se demander quel est le noyau de ce morphisme de monoïde. Nous allons montrer que c'est précisément le groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$.

Définition 8.2.1. 1. *On définit l'ensemble* $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ *des* champs de $\mathbb{A}$-vecteurs *de* M *comme étant l'ensemble des sections lisses sur* $\mathbb{K}$ *du fibré* $\pi^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$*. Dans une carte de fibré,* X *est de la forme*

$$X : U \to U \times \left(V \otimes \mathring{\mathbb{A}}\right), \quad x \mapsto x + \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \otimes a_i,$$

où $(a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n)$ *est une* $\mathbb{K}$*-base de* $\mathbb{A}$*, et où, pour tout entier* $1 \leq i \leq n$*,* $X_i : U \to V$ *est un champ de* $\mathrm{T}\mathbb{K}$*-vecteurs sur* U*, c'est-à-dire un champ de vecteurs usuel.*

2. *On définit le* groupe des automorphismes infinitésimaux *de* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$*, parfois appelé* groupe $\mathbb{A}$-infinitésimal *de* M*, noté* $\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$*, comme étant le groupe des automorphismes* $\mathbb{A}$*-lisses de* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *au-dessus de* M*, c'est-à-dire que*

$$\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) := \{F \in \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \mid \pi_M^{\mathbb{A}} \circ F = \pi_M^{\mathbb{A}}\}$$

est le sous-groupe des éléments de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$ *qui préservent les fibres.*

Théorème 8.2.2. *Soient* $\mathbb{A}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil et* M *une variété lisse sur* $\mathbb{K}$*.*

1. *Tout champ de* $\mathbb{A}$*-vecteurs* X *admet une unique* extension *en une application* $X^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *lisse sur* $\mathbb{A}$*, où le terme « extension » signifie que* $X^{\mathbb{A}} \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} = X$*.*
2. *L'ensemble* $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ *des* $\mathbb{A}$*-sections de* M *possède une structure* $\mathbb{A}$*-polynomiale sans terme constant, naturelle, définie point par point à l'aide de celle des fibres de* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$*. C'est-à-dire que la notion d'application polynomiale dans* $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ *est bien définie.*

3. *L'ensemble $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs est canoniquement isomorphe au groupe $\mathbb{A}$-infinitésimal* $\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$ *de M, ce qui le munit d'une structure canonique de groupe. L'isomorphisme est donné par :*

$$\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \hookrightarrow\!\!\!\!\to \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M), \quad F \mapsto X := F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} .$$

Démonstration. 1. Le point (3) du théorème 8.1.8 montre que l'application

$$\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{K}}(M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N) \hookrightarrow\!\!\!\!\to \mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N), \quad F \mapsto \mu_N^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$$

est un isomorphisme. En particulier, toute application $X : M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ lisse sur $\mathbb{K}$ admet une unique extension $X^{\mathbb{A}} = \mu_M^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}X$ en une application $X^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ lisse sur $\mathbb{A}$.

2. Toute fibre de $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ possède une structure de variété $\mathbb{A}$-polynomiale, sans terme constant.

3. L'extension $X^{\mathbb{A}}$ de X est au dessus de

$$\pi_M^{\mathbb{A}} \circ X^{\mathbb{A}} \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} = \pi_M^{\mathbb{A}} \circ X = \mathrm{id}_M.$$

Par conséquent, elle préserve les fibres. De plus, si $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est une application lisse sur $\mathbb{A}$ qui préserve les fibres, alors $X := F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} : M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est clairement une section lisse sur $\mathbb{K}$.

Jusqu'à présent, nous avons montré que $X \mapsto X^{\mathbb{A}}$ est une bijection de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ dans le monoïde des applications $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ lisses sur $\mathbb{A}$ et au-dessus de M. Il reste à prouver que toute telle application est un $\mathbb{A}$-difféomorphisme. Dans un premier temps, on transfère le produit associatif de monoïde de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ en définissant le produit associatif de sections

$$X \cdot Y := X^{\mathbb{A}} \circ Y = X^{\mathbb{A}} \circ Y^{\mathbb{A}} \circ \sigma_M^{\mathbb{A}}.$$

L'élément neutre est $\mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M}$, l'extension de $\sigma_M^{\mathbb{A}}$. Montrons que, pour toute section X, il existe une section X^{-1} telle que $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = \sigma_M^{\mathbb{A}}$.

Dans une carte, nous avons

$$X^{\mathbb{A}}(x, \boldsymbol{v}) = \left(x, X(x) + \boldsymbol{v} + \mu_U^{\mathbb{A}} \circ \left(\mathrm{Tay}_x^k X_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}(\boldsymbol{v})\right).$$

En effet, en décomposant X sous la forme $X = X_{\mathbb{K}} + X_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$, avec $X_{\mathbb{K}} = \mathrm{id}_U$ et $X_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} : U \to V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$, nous obtenons

$$X^{\mathbb{A}}\left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} X_{\mathbb{K}}(x) + \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} X_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}(x).$$

Or $D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} X_{\mathbb{K}}(x) = \boldsymbol{v}$ si $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$ et 0 si $|\boldsymbol{\alpha}| > 1$. On obtient finalement

$$X^{\mathbb{A}}\left(x + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = X(x) + \boldsymbol{v} + \sum_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}} D_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{\alpha}} X_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}(x).$$

Notons que $D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\cdot} X_{\mathring{\mathbb{A}}}(x)$ est nilpotente si $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. Considérons l'application

$$L_X : \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M) \to \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M), \quad Y \mapsto X \cdot Y.$$

Dans une carte, nous avons, en tout point x de M,

$$X \cdot Y(x) = X^{\mathbb{A}}\left(x, Y_{\mathring{\mathbb{A}}}(x)\right) = \left(x, X(x) + Y_{\mathring{\mathbb{A}}}(x) + \mu_U^{\mathbb{A}} \circ \left(\mathrm{Tay}_x^k X_{\mathring{\mathbb{A}}}\right)_{\mathring{\mathbb{A}}} \left(Y_{\mathring{\mathbb{A}}}(x)\right)\right).$$

L'application L_X est par conséquent $\mathbb{A}$-polynomiale pour la structure polynomiale de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ définie au point précédent. C'est la composée de la translation fibre à fibre par X, et de la somme de l'identité et d'une application nilpotente. Or d'après le théorème A.2.2, une application $\mathbb{A}$-polynomiale est inversible si et seulement si sa partie $\mathbb{A}$-linéaire est inversible. La partie linéaire de L_X est la somme de l'identité et d'une application linéaire nilpotente g. Cette partie linéaire est unipotente donc inversible d'inverse $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i g^i$. Finalement, L_X est bien inversible. On note $(L_X)^{-1}$ l'inverse de L_X et on pose $X^{-1} := (L_X)^{-1} \circ \sigma_M^{\mathbb{A}}$. Alors on a

$$X \cdot X^{-1} = L_X \circ (L_X)^{-1} \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} = \sigma_M^{\mathbb{A}}.$$

Donc X possède un inverse à droite. De même, en considérant la multiplication R_X des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs à droite par X, on montre que X admet un inverse à gauche. Finalement, X est bien inversible dans $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$, d'inverse

$$(L_X)^{-1} \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} = (R_X)^{-1} \circ \sigma_M^{\mathbb{A}}.$$

$\square$

Le groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ n'est pas commutatif en général. En revanche, si $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil de hauteur 2, alors le groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ est commutatif et est isomorphe au groupe des translations fibre à fibre dans le fibré vectoriel $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$. En effet, dans ce cas, l'extension à $\mathring{\mathbb{A}}$ de $X_{\mathring{\mathbb{A}}}$ est nulle et l'extension $X^{\mathbb{A}}$ s'écrit alors $X^{\mathbb{A}}(x, \boldsymbol{v}) \mapsto (x, X(x) + \boldsymbol{v})$.

8.2.2 Groupes de difféomorphismes

Soient $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et M une variété $\mathbb{K}$-lisse modelée sur V. Le théorème suivant donne la structure du groupe $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$ des $\mathbb{A}$-difféomorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.

Théorème 8.2.3. *La suite de monoïdes suivante est exacte et scindée*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M) \arrow[r, hook] & \mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \arrow[r, two heads] & \mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{K}}(M, M) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd},$$

la section étant donnée par $\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{K}}(M, M) \to \mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$, $f \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}f$. *Le groupe* $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$ *est un produit semi-direct de* $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ *et de* $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M)$ *: par restriction aux applications inversibles, il existe une suite exacte scindée de groupes*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M) \arrow[r, hook] & \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}.$$

Démonstration. L'injection est celle donnée dans le théorème 8.2.2 et la surjection est celle donnée dans le théorème 8.1.8. L'exactitude est une conséquence du théorème 8.2.2 (3). $\square$

Corollaire 8.2.4. *En tant qu'ensemble,* $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N) = \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M,N) \times \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$. *Plus précisément, tout $\mathbb{A}$-difféomorphisme $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ est de la forme $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f \circ X^{\mathbb{A}}$, où $X^{\mathbb{A}}$ est l'extension d'un élément de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$, et où $f := \pi_M^{\mathbb{A}} \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}}$.*

Démonstration. Soit $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ un $\mathbb{A}$-difféomorphisme. Alors l'application $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f^{-1} \circ F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, où $f := \pi_M^{\mathbb{A}} \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}}$, est une application $\mathbb{A}$-lisse au-dessus de M et donc est l'extension d'une section $X \in \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$ lisse sur $\mathbb{K}$. $\square$

8.3 Fibrés $\mathbb{A}$-tangents des groupes de Lie

Rappelons-nous de la définition 7.3.1 des groupes de Lie sur $\mathbb{K}$. Considérons le fibré $\mathbb{A}$-tangent d'un groupe de Lie G et étudions sa structure de groupe. Pour cela, il nous faut considérer la fibre de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ en l'élément neutre e de G. Dans le cas tangent usuel, cette fibre correspond à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

8.3.1 Groupes $\mathbb{A}$-tangents

Théorème 8.3.1. *Soient G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ d'élément neutre $e := e_G$ et $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors, en notant $T^{\mathbb{A}}G =: G^{\mathbb{A}}$, nous avons*

1. *Nous avons la suite exacte scindée suivante :*
$$0 \;\to\; G_e^{\mathbb{A}} := \left(\pi^{\mathbb{A}}\right)^{-1}(e) \;\to\; G^{\mathbb{A}} \;\rightleftarrows\; G \;\to\; 1\,,$$
où $G_e^{\mathbb{A}} := \left(\pi^{\mathbb{A}}\right)^{-1}(e)$. Le groupe $G^{\mathbb{A}}$ est le produit semi-direct $G^{\mathbb{A}} = G \ltimes_{\mathrm{Ad}^{\mathbb{A}}} G_e^{\mathbb{A}}$, où $\mathrm{Ad}^{\mathbb{A}}(g) := \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}}c_g$, *$c_g$ désignant la conjugaison par un élément g dans G.*
2. *Le groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ *agit par $\mathbb{K}$-automorphismes de $G^{\mathbb{A}}$ et de $G_e^{\mathbb{A}}$.*
3. *En tant que fibré sur G, $G^{\mathbb{A}}$ est trivialisable, de fibre type $G_e^{\mathbb{A}}$. On dit que G est $\mathbb{A}$-*parallélisable.

Démonstration. (1) et (2) sont immédiats.

(3) Il existe deux trivialisations naturelles : celle à droite
$$G^{\mathbb{A}} \to G \times G_e^{\mathbb{A}}, \quad U_g \mapsto \left(g, \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} r_{g^{-1}} U_g\right)$$
et celle à gauche
$$G^{\mathbb{A}} \to G \times G_e^{\mathbb{A}}, \quad U_g \mapsto \left(g, \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} l_{g^{-1}} U_g\right),$$
où r_g et l_g désignent la multiplication à droite et à gauche dans G par un élément g. Dans la suite, nous utiliserons toujours la trivialisation à droite. $\square$

Exemple 8.3.2. Dans le cas tangent usuel, nous avons la suite exacte scindée suivante
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, hook] & \mathrm{T}G \arrow[r, two heads] & G \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}.$$
En tant que fibré, TG est trivialisable de fibre type $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et la structure de groupe est donnée par $TG = G \ltimes_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ où Ad est la représentation adjointe usuelle.

Le produit est défini par :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{(g,h)}m(U_g,V_h) &= T_{(g,h)}m((U_g,0_h)+(0,V_h)) \\ &= T_{(g,h)}m(U_g,0)+T_{(g,h)}m(0_g,V_h) \text{ par linéarité de } Tm \\ &= T_g r_h(U_g)+T_h l_g(V_h). \end{aligned}$$

Définition 8.3.3. *Un* groupe ($\mathbb{K}$-)polynomial de degré k *est un* $\mathbb{K}$*-module* M *muni d'une loi de groupe* $m : M \times M \to M$ *tel que* 0 *soit l'élément neutre et tel que, pour tout entier* j*, les multiplications itérées et l'inversion*

$$m^{(j)} : M^j \to M, \quad (a_1,\dots,a_j) \mapsto a_1 \cdots a_j \quad \text{et} \quad i : M \to M, \quad x \mapsto x^{-1}$$

soient des applications polynomiales de degré au plus k.

Théorème 8.3.4. *Soit* $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Weil de hauteur* k*, et soit* $G_e^{\mathbb{A}}$ *le noyau du morphisme* $\pi_G^{\mathbb{A}} : G^{\mathbb{A}} \to G$.

1. *Relativement à toute carte de fibré* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U$ *(où* $U \subset G$ *est un domaine de carte contenant* e*), le groupe* $G_e^{\mathbb{A}}$ *est un groupe polynomial de degré* k.
2. *Si* $\mathbb{A}$ *est une algèbre de Weil de hauteur* 2*, c'est-à-dire si* $\mathring{\mathbb{A}}$ *est une algèbre munie du produit nul, alors* $G_e^{\mathbb{A}}$*, relativement à toute carte de fibré comme ci-dessus, est un groupe de Lie abélien, isomorphe au groupe additif du* $\mathbb{K}$*-module* $V_{\mathring{\mathbb{A}}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathring{\mathbb{A}}$.

Démonstration. Soit $m_V : V \times V \supset U \to V$ l'application de multiplication de G dans la carte V. Dans cette carte, l'application de multiplication de $\mathrm{J}^k G$ est donné par $\mathrm{J}^k(m_V)$. Ses composantes sont données par les applications polynomiales de degré j suivantes

$$\boldsymbol{v} \mapsto \mathrm{J}^j m((e,e),\boldsymbol{v},0,\dots,0).$$

□

8.3.2 Algèbres de Lie

Les algèbres de Lie des groupes de Lie $\mathbb{A}$-tangents et leurs crochets de Lie s'expriment en fonction de l'algèbre de Lie et du crochet de Lie usuels, c'est-à-dire correspondant au foncteur de Weil T. Définissons l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Pour cela, nous suivons l'approche usuelle par les champs de vecteurs invariants à gauche. Commençons par définir le crochet de Lie des champs de vecteurs. On a alors le théorème suivant.

Théorème 8.3.5. *Il existe une unique structure de* $\mathbb{K}$*-algèbre de Lie sur* $\mathfrak{X}_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(M)$ *telle que pour tous champs* X, Y *dans* $\mathfrak{X}_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(M)$*, et dans toute carte, on ait*

$$[X,Y](x) = dX(x)Y(x) - dY(x)X(x).$$

La proposition suivante est alors vérifiée.

Proposition 8.3.6. *Soit* $f : M \to N$ *une application lisse sur* $\mathbb{K}$ *entre deux variétés. Soient* X *et* Y *deux champs de* $\mathbb{A}$*-vecteurs sur* M*,* f*-reliés respectivement à* X' *et* Y'*, deux champs de vecteurs sur* N*. Alors* $[X,Y]$ *est* f*-relié à* $[X',Y']$*.*

Définition 8.3.7. *Un champ de vecteurs X de $\mathfrak{X}_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G)$ est dit* invariant à gauche *si, pour tout élément g de G,*

$$X \circ l_g = \mathrm{T}l_g \circ X,$$

où l_g désigne la multiplication à gauche par g dans G.

L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche est noté $\mathfrak{X}^L_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G)$. De même, nous définissons l'ensemble $\mathfrak{X}^R_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G)$ des champs de vecteurs *invariants à droite.*

Les champs de vecteurs invariants à gauche sont précisément les champs de vecteurs l_g-reliés à eux-mêmes pour tout g dans G.

Proposition 8.3.8. *L'ensemble $\mathfrak{X}^L_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G)$ des champs des vecteurs invariants à gauche est en bijection avec la fibre T_eG via l'application d'évaluation en e :*

$$\mathfrak{X}^L_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G) \to \mathrm{T}_eG,\ X \mapsto X(e).$$

Démonstration. Si un champ de vecteurs X est invariant à gauche, alors $X(g) = X \circ l_g(e) = \mathrm{T}_e l_g X(e)$, donc l'évaluation en e est injective sur l'ensemble $\mathfrak{X}^L_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G)$. Montrons la surjectivité : soit U dans T_eG. Alors la multiplication $r_U : \mathrm{T}G \to \mathrm{T}G$ à droite par U dans $\mathrm{T}G$ préserve les fibres et donc définit un champ de vecteurs

$$U^L := r_U \circ \sigma^{\mathrm{T}}_G : G \to \mathrm{T}G, g \mapsto r_U(0_g) = \mathrm{T}m(U, 0_g) = \mathrm{T}_e r_g(U),$$

qui est invariant à gauche puisque la multiplication à gauche commute avec la multiplication à droite. Notez que les égalités $r_U(0_g) = \mathrm{T}m(U, 0_g) = \mathrm{T}_e r_g(U)$ sont une conséquence directe de la formule

$$\mathrm{T}_{(x,y)}m(U, U') = \mathrm{T}_{(x,y)}m((U, 0_y) + (0_x, U')) = \mathrm{T}_x r_y U + \mathrm{T}_y l_x U'.$$

□

De plus, l'ensemble $\mathfrak{X}^L_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G)$. En effet, elle est stable par crochet de Lie : d'après la proposition 8.3.6, si deux champs de vecteurs sont l-reliés à eux-mêmes, alors leur crochet de Lie est également l-relié à lui-même.

L'ensemble $\mathfrak{g}$ peut alors être muni du *crochet de Lie* défini par

$$[U, V]_{\mathfrak{g}} := [U^L, V^L]_{\mathfrak{X}_{\mathrm{T}\mathbb{K}}(G)}(e)$$

et est alors appelé l'*algèbre de Lie de G.*

Algèbres de Lie des groupes de Lie $\mathbb{A}$-tangents

Théorème 8.3.9. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$, de $\mathbb{K}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie du crochet de Lie $\mathbb{K}$-bilinéaire $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$. Alors l'algèbre de Lie $T_{0^{\mathbb{A}}_e}\left(G^{\mathbb{A}}\right)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{A}$ munie du crochet donné par extension scalaire de $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ à $\mathbb{A}$.*

Démonstration. D'après la section précédente, $G^{\mathbb{A}}$ est un groupe de Lie sur $\mathbb{A}$. De plus, $\mathrm{T}_{0^{\mathbb{A}}_e}(G^{\mathbb{A}}) = \mathrm{T}_e\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathrm{T}_eG = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathfrak{g}$ via le difféomorphisme $\tau^{\mathbb{A},\mathrm{T}\mathbb{K}}_M$ induit par le flip $\tau^{\mathbb{A},\mathrm{T}\mathbb{K}} : \mathbb{A} \otimes \mathrm{T}\mathbb{K} \to \mathrm{T}\mathbb{K} \otimes \mathbb{A}$. En appliquant le foncteur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ à l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, nous obtenons $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathfrak{g}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\right)$ qui est à nouveau une algèbre de Lie, dont on note $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathfrak{g}} := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ le crochet de Lie. □

Soit $(a_0 = 1, a_1, \dots, a_n)$ une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{A}$. Dans une carte, nous avons, pour tous X, Y dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{A}$:

$$[X, Y]_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathfrak{g}} = \left[\sum_{i=0}^{n} X_i \otimes a_i, \sum_{j=0}^{n} Y_j \otimes a_j\right]_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathfrak{g}} = \sum_{i,j=0}^{n} [X_i, Y_j]_{\mathfrak{g}} \otimes a_i a_j.$$

8.4 Somme de Whitney et composition des foncteurs

Dans le chapitre consacré aux algèbres de Weil, nous avons considéré deux constructions élémentaires de nouvelles algèbres de Weil à partir de deux algèbres de Weil $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$: le produit tensoriel et la somme directe. Les fibrés de Weil correspondant à ces algèbres s'expriment de manière simple en fonction des foncteurs de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}$.

Le théorème ci-dessous décrit le comportement des fibrés de Weil relativement au produit tensoriel et à la somme de Whitney de deux algèbres de Weil, qui présente des analogies avec la K-théorie des fibrés vectoriels.

Théorème 8.4.1. *Soient $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}$ et $\mathbb{B} = \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{B}}$ deux $\mathbb{K}$-algèbres de Weil de hauteurs respectives $k_{\mathbb{A}}$ et $k_{\mathbb{B}}$.*

1. *Le foncteur de Weil défini par la somme de Whitney $\mathbb{A} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{B}$ (voir le lemme 6.4.1) est naturellement isomorphe à la somme de Whitney des foncteurs $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}$ sur la variété de base, c'est-à-dire que pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, on a*

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{B}} M \cong \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M,$$

   où $\times_M$ désigne le produit fibré sur M. Par transport de structure, ceci définit sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M$ une structure de variété lisse sur $\mathbb{A} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{B}$. La fibre type est $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}}$, les changements de cartes et fonctions de transition sont les produits cartésiens des changements de cartes et fonctions de transition des fibrés $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{B}} M$.

2. *Le foncteur de Weil défini par le produit tensoriel $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{B}$ est isomorphe à la composée $\mathrm{T}^{\mathbb{B}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}$: pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, on a*

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}} M \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{B}} \left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M\right).$$

   La fibre type du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{B}} M$ sur M est $\mathbb{K}$-difféomorphe à

$$V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \oplus V_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}} \oplus V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}} \otimes \overset{\circ}{\mathbb{B}}}.$$

3. *Il existe un isomorphisme naturel de fibrés $\mathrm{T}^{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}} M \cong \mathrm{T}^{\mathbb{B} \otimes \mathbb{A}} M$ appelé le* flip généralisé.

4. *Il existe un isomorphisme naturel de distributivité de fibrés sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$*

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{B}} M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{B}'} M) \cong \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M \times_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M} \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathrm{T}^{\mathbb{B}'} M.$$

5. *Le fibré de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A} \diamond \mathbb{B}}$ correspondant à l'espace le plus vertical $\mathbb{A} \diamond \mathbb{B}$ a pour fibre type $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}} \otimes \overset{\circ}{\mathbb{B}}}$. Il existe une suite exacte de fibrés*

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A} \diamond \mathbb{B}} M \hookrightarrow \mathrm{T}^{\mathbb{B}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \twoheadrightarrow \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M.$$

Soulignons une nouvelle fois que les fibrés $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ ne sont en général *pas* des fibrés vectoriels, de sorte qu'il n'existe pas de notion naturelle de produit tensoriel fibre à fibre.

Démonstration. 1. Soit $f : V \supset U \to W$ une application lisse sur $\mathbb{K}$. Le résultat est une conséquence de l'isomorphisme

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \times_U \mathrm{T}^{\mathbb{B}}U = U \times V_{\mathring{\mathbb{A}}} \times V_{\mathring{\mathbb{B}}} = \mathrm{T}^{\mathbb{A}\oplus_{\mathbb{K}}\mathbb{B}}U$$

et de l'application du théorème d'unicité 7.1.4, en observant de plus que

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f \times_{\mathrm{id}_M} \mathrm{T}^{\mathbb{B}}f \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{A}\oplus_{\mathbb{K}}\mathbb{B}}f.$$

2. Soit $f : V \supset U \to W$ une application lisse sur $\mathbb{K}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U)) = \mathrm{T}^{\mathbb{B}}(U \times V_{\mathring{\mathbb{A}}}) &= (U \times V_{\mathring{\mathbb{A}}}) \times (V \times V_{\mathring{\mathbb{A}}})_{\mathring{\mathbb{B}}} \\
&= U \times V_{\mathring{\mathbb{A}}} \times V_{\mathring{\mathbb{B}}} \times V_{\mathring{\mathbb{A}}\otimes\mathring{\mathbb{B}}} \\
&\simeq U \times V_{\mathring{\mathbb{A}}\oplus\mathring{\mathbb{B}}\oplus\mathring{\mathbb{A}}\otimes\mathring{\mathbb{B}}} \\
&= \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}U.
\end{aligned}$$

En appliquant deux fois le théorème 7.1.2 et en notant que

$$\sigma^{\mathbb{A}}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U} \circ \sigma^{\mathbb{A}}_{U} = \sigma^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}_{U},$$

il s'ensuit que

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f) : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U) \to (W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{B}$$

est une extension de f qui est lisse sur l'anneau $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathbb{K})$. Le point important est que cet anneau est l'anneau $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathbb{K}) = \mathrm{T}^{\mathbb{B}}\mathbb{A} = \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{B}$. Par conséquent, d'après la partie unicité du théorème 7.1.4, nous obtenons $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f) = \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}}f$.

3. C'est une conséquence de l'isomorphisme d'algèbres de Weil $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \cong \mathbb{B} \otimes \mathbb{A}$.
4. C'est une conséquence des points (1), (2), (3) et du lemme 6.4.1 (3).
5. C'est une conséquence directe du lemme 6.4.4 et des points précédents. Notez que cette suite exacte n'admet pas de section à gauche ou à droite en général.

□

Exemple 8.4.2. L'extension vectorielle centrale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil

$$\mathrm{T}_{12}\mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K} \simeq \mathrm{T}\mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{T}^2\mathbb{K} \simeq \mathrm{T}_1\mathbb{K} \otimes \mathrm{T}_2\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{T}_1\mathbb{K} \oplus_{\mathbb{K}} \mathrm{T}_2\mathbb{K}$$

induit, pour toute variété M, la suite exacte de fibrés sur M suivante

$$\mathrm{T}_{12}M \simeq \mathrm{T}M \hookrightarrow \mathrm{T}^2M = \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2M \twoheadrightarrow \mathrm{T}_1M \times_M \mathrm{T}_2M.$$

Chapitre 9

Les fibrés Φ-tangents de Weil

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Dans le chapitre précédent, nous avons considéré les fibrés $\mathbb{A}$-tangents $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$, qui sont les fibrés images du foncteur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} : \mathcal{M}an_{\mathbb{K}} \to \mathcal{S}Bun_{\mathbb{K}}^{\mathbb{A}}$. Ce sont précisément les fibrés induits par le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$. Les structures géométrique et algébrique de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ sur M sont intimement liées à la théorie des *connexions*. Dans la pratique, les algèbres de Weil apparaissent en « tours » dont les étages sont des extensions vectorielles d'algèbres de Weil et, à chaque niveau, un automorphisme d'algèbres induit canoniquement des automorphismes de fibrés.

Dans ce chapitre, nous allons montrer que les fibrés $\mathbb{A}$-tangents sont des exemples de fibrés induits par des extensions polynomiales d'algèbres de Weil. Pour toute extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil

$$\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$$

et pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, l'application induite $\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ possède une structure de fibré polynomial, appelé *fibré Φ-tangent*. Une différence avec le cas des fibrés $\mathbb{A}$-tangents est que, bien que ces fibrés soient encore polynomiaux, ils ne sont pas nécessairement sans terme constant et ne possèdent donc pas de sections naturelles si l'extension n'est pas scindée. Par exemple, les extensions vectorielles associées aux fibrés des jets

$$\mathbb{K} \oplus \delta^{k+1}\mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{J}^{k+1}\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{J}^k\mathbb{K} \tag{9.0.1}$$

ne sont pas scindées, sauf pour $k = 0$. Il s'agit d'une situation complètement différente des fibrés tangents itérés dont les extensions vectorielles

$$\mathbb{K} \oplus \varepsilon_{k+1}\mathrm{T}^k\mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{T}^{k+1}\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{T}^k\mathbb{K}$$

sont scindées. En effet, les fibrés induits par une telle extension sont de la forme $\pi_{\mathrm{T}^kM}^{\mathrm{T}\mathbb{K}} : \mathrm{T}(\mathrm{T}^kM) = \mathrm{T}^{k+1}M \to \mathrm{T}^kM$, possèdent une section nulle, et correspondent au fibré $\mathrm{T}\mathbb{K}$-tangent de la variété T^kM. De tels fibrés ont été étudiés au chapitre précédent, en remplaçant la variété M par la variété T^kM. Il n'existe pas de point de vue analogue dans le cas des jets.

Dans le cas d'une extension vectorielle, l'algèbre de Weil $\mathbb{V}$ est de hauteur 1 et les fibrés induits sont des fibrés affines. Ainsi, pour tout entier k et pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, le fibré $\mathrm{J}^{k+1}M \to \mathrm{J}^kM$ induit par l'extension (9.0.1) est un fibré affine.

Les fibrés Φ-tangents possèdent une structure de fibré $\mathbb{A}$-lisse, où la $\mathbb{A}$-lissité de la base est obtenue par restriction scalaire de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{B}$ via le morphisme Φ. Nous définissons le foncteur

$$\mathrm{T}^{\Phi} : \mathcal{M}an_{\mathbb{K}} \to \mathcal{B}un_{\mathbb{A}}, \quad M \mapsto \left(\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M\right).$$

Comme dans le cas $\mathbb{A}$-tangent, toute application $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ lisse sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes induit une application $F_\Phi : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N$ lisse sur $\mathbb{B}$ telle que (F, F_Φ) soit un morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_M"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \arrow[d, "\Phi_N"] \\
\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \arrow[r, "F_\Phi"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N
\end{tikzcd}$$

En revanche, il n'existe pas de manière canonique de relever une application $F : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N$ lisse sur $\mathbb{B}$ en une application $F^\Phi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ telle que (F^Φ, F) soit un morphisme de fibrés $\mathbb{A}$-lisses. Pour ce faire, il nous faut déterminer, si elle existe, une section $S_M : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ du fibré Φ_M. L'existence de telles sections sera fortement liée à la notion de connexion que nous verrons dans la partie IV. Si une telle section existe alors le groupe des $\mathbb{A}$-difféomorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est produit semi-direct du groupe des sections du *fibré Φ-vertical* $\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M \to M$ et du groupe des $\mathbb{B}$-difféomorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$, où $\mathbb{V} := \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{V}}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil.

9.1 Lissité et polynomialité

Commençons par étudier les structures algébriques et différentiables des fibrés Φ-tangents.

Théorème 9.1.1. *Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de degré j de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil et soit M une variété $\mathbb{K}$-lisse, modelée sur V. Alors l'application induite*

$$\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$$

est un fibré $\mathbb{A}$-lisse, polynomial de degré j, de fibre type $V_{\overset{\circ}{\mathbb{V}}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \overset{\circ}{\mathbb{V}}$. En particulier, si $\overset{\circ}{\mathbb{V}}$ est nilpotent d'ordre 2, alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré affine sur $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$.

Ce théorème montre que T^Φ défini par

$$\mathrm{T}^\Phi : \mathcal{M}an_{\mathbb{K}} \to \mathcal{B}un_{\mathbb{A}}, \quad M \mapsto \left(\Phi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M\right)$$

est un foncteur de la catégorie des variétés lisses sur $\mathbb{K}$ dans celle des fibrés $\mathbb{A}$-lisses. Ce foncteur n'est pas un foncteur fibré au sens où il n'existe pas d'application naturelle $\mathcal{B}un_{\mathbb{A}} \to \mathcal{M}an_{\mathbb{K}}$ dont T^Φ soit une section. Notez que ce fibré n'est pas sans terme constant en général, c'est-à-dire que les changements de cartes ne sont pas sans terme constant. En particulier, le fibré Φ_M n'admet pas de section naturelle en général.

Démonstration. Notons k la hauteur de $\mathbb{A}$. D'après le théorème 7.2.4, l'application Φ_M est bien lisse sur $\mathbb{A}$. Soit $\varphi : U \to U' \subset V$ un changement de cartes de M. Par définition, l'espace total $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est recouvert par les domaines de cartes $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U$, et la base $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ par les domaines de cartes $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}U$. Fixons une section $\mathbb{K}$-linéaire $s : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ et décomposons $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{H}} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{V}}$ en tant que $\mathbb{K}$-module, où $\overset{\circ}{\mathbb{H}} := s\left(\overset{\circ}{\mathbb{B}}\right)$, et, de manière analogue, $V_{\mathbb{A}} = V \oplus V_{\overset{\circ}{\mathbb{H}}} \oplus V_{\overset{\circ}{\mathbb{V}}}$ pour le modèle de l'espace total. Alors les changements de cartes de l'espace total sont de la forme

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}f\left(x, \boldsymbol{v}_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) = \left(f(x), \left(\mathrm{Tay}_x^k f\right)_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\left(\boldsymbol{v}_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)\right),$$

que nous pouvons écrire, en utilisant une $\mathbb{K}$-base $(a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{A}$ adaptée à la décomposition $\mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{H}} \oplus \mathring{\mathbb{V}}$, sous la forme

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i\right) = f(x) + \sum_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} f(x) \otimes \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

En composant avec Φ_M, nous obtenons

$$\Phi_M \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i\right) = f(x) + \sum_{\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \leq k} D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} f(x) \otimes \Phi\left(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}\right),$$

qui est égal à

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}} f \circ \Phi_M\left(x + \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i\right) = \mathrm{T}^{\mathbb{B}} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \Phi(a_i)\right).$$

Ainsi, les changements de cartes de variété sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ sont bien polynomiaux et au-dessus des changements de cartes de variété sur $\mathrm{T}^{\mathbb{B}} M$.

Notez que la composante dans $V_{\mathring{\mathbb{V}}}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} f\left(x, \boldsymbol{v}_{\mathring{\mathbb{A}}}\right)$ est composée de la somme de tous les éléments de la forme $D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} f(x) \otimes \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}$, où $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}$ est produit d'au moins un élément a_i de $\mathring{\mathbb{V}}$ car $\mathring{\mathbb{V}}$ est un idéal, mais également de tous les éléments de la forme

$$\mathrm{pr}_{V_{\mathring{\mathbb{V}}}}\left(D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} f(x) \otimes \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}\right) = D^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{v}} f(x) \otimes \mathrm{pr}_{\mathring{\mathbb{V}}}\left(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}\right),$$

où $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}$ est produit d'éléments de $\mathring{\mathbb{H}}$. Ce dernier terme constitue le terme constant du changement de cartes de fibrés. $\square$

En particulier, si $\mathring{\mathbb{V}} = \mathring{\mathbb{A}}$, *i.e.* dans le cas $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \to M$, alors $\mathbb{B} = \mathbb{K}$ et $\mathring{\mathbb{B}} = \{0\} = \mathring{\mathbb{H}}$, ce qui implique que le polynôme est sans terme constant, comme nous l'avons vu.

Remarque 9.1.2. On observe que le polynôme dans la preuve du théorème est sans terme constant si $\mathring{\mathbb{H}}$ est un idéal, c'est-à-dire, s'il existe une section de $\mathbb{K}$-algèbres $\sigma^{\Phi} : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$. Si une telle section existe, alors $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{B}$-algèbre de Weil et la construction du théorème n'est rien d'autre que la construction du fibré de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ sur la base $\mathrm{T}^{\mathbb{B}} M$ par rapport à la $\mathbb{B}$-algèbre $\mathbb{A}$. Dans ce cas, $\mathbb{H} := \sigma(\mathbb{B})$ est une algèbre de Weil, et induit donc un foncteur de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{H}}$. $\mathbb{A}$ se décompose alors canoniquement sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{H} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$ en tant que $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Ceci induit un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} = \mathrm{T}^{\mathbb{H}} \times_{\mathrm{id}} \mathrm{T}^{\mathbb{V}}$, de sorte qu'il existe, pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, une décomposition $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M = \mathrm{T}^{\mathbb{H}} M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}} M \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}} M$. En particulier, la section σ^{Φ} est un morphisme de $\mathbb{B}$-algèbres de Weil et induit une Φ-section distinguée $\sigma^{\Phi}_M : \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$, qui est lisse sur $\mathbb{B}$, polynomiale sans terme constant en les fibres sur M, c'est-à-dire qu'elle vérifie de plus $\sigma^{\Phi}_M \circ \sigma^{\mathbb{B}}_M = \sigma^{\mathbb{A}}_M$.

Remarque 9.1.3. Si l'extension est centrale, alors les restrictions aux fibres en $\left(x, \boldsymbol{v}_{\mathring{\mathbb{B}}}\right) \in \mathrm{T}^{\mathbb{B}} U$ des changements de cartes du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M$ sont de la forme

$$V \otimes \mathring{\mathbb{V}} \to V \otimes \mathring{\mathbb{V}}, \quad \boldsymbol{v}_{\mathring{\mathbb{V}}} \mapsto Df(x) \boldsymbol{v}_{\mathring{\mathbb{V}}} + C_x\left(\boldsymbol{v}_{\mathring{\mathbb{B}}}\right),$$

où C_x est une application polynomiale sans terme constant ni terme linéaire.

Exemple 9.1.4. Pour tous entiers $k > \ell$, la suite $\mathbb{V}_\ell^k \hookrightarrow \mathrm{J}^k\mathbb{K} \overset{\pi_\ell^k}{\twoheadrightarrow} \mathrm{J}^\ell\mathbb{K}$ est une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil, où $\mathbb{V}_\ell^k$ est l'algèbre de Weil de $\mathbb{K}$-base $(1, \delta^{\ell+1}, \dots, \delta^k)$, où δ est un élément nilpotent d'ordre $k+1$. Par conséquent, si $\ell \geq \frac{k}{2}$, le produit sur $\mathcal{V}_\ell^k$ est le produit nul, et alors le fibré $\mathrm{J}^k M \to \mathrm{J}^\ell M$ est affine. En particulier, pour $k = \ell + 1$, le fibré

$$\mathrm{J}^{\ell+1}M \twoheadrightarrow \mathrm{J}^\ell M$$

est affine et n'admet pas de section naturelle, sauf si $\ell = 0$.

Exemple 9.1.5. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_k$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil graduée. Alors chaque étage

$$\mathbb{A}_{i+1} \hookrightarrow \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_{i+1} \twoheadrightarrow \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_i$$

de la tour d'extensions associée à sa graduation (voir la proposition 6.5.2) est une extension vectorielle, qui induit un fibré affine

$$\mathrm{T}^{\mathbb{K}\oplus\mathcal{A}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{A}_{i+1}}M \twoheadrightarrow \mathrm{T}^{\mathbb{K}\oplus\mathcal{A}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{A}_i}M,$$

qui ne possède pas de section naturelle en général.

9.2 Morphismes de fibrés Φ-tangents

Nous avons étudié au théorème 8.1.8 la structure des applications lisses sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes et les avons interprétées comme des morphismes de fibrés $\mathbb{A}$-lisses sur M, c'est-à dire que nous avons considéré leur comportement vis-à-vis de la projection $\pi^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ et de sa section $\sigma^{\mathbb{A}} : \mathbb{K} \to \mathbb{A}$. Une question naturelle est de se demander quelle est la structure des applications lisses sur $\mathbb{A}$ entre deux variétés $\mathbb{A}$-tangentes, cette fois-ci, relativement à un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Une différence fondamentale avec le cas précédent est qu'il n'existe pas, en général, de section $\mathbb{B} \to \mathbb{A}$ en tant qu'algèbres, mais seulement en tant que $\mathbb{K}$-modules. De plus, si une telle section existe, elle n'est pas unique en général.

La première partie du théorème 8.1.8 se généralise à tout morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil.

Théorème 9.2.1. *Soit $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Soient M et N deux variétés lisses sur $\mathbb{K}$. Soit $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ une application lisse sur $\mathbb{A}$. Alors il existe une unique application $\mathbb{B}$-lisse $F_\Phi : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N$* sous *$F$, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_M"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \arrow[d, "\Phi_N"] \\
\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \arrow[r, "F_\Phi"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N
\end{tikzcd}$$

De plus, l'application

$$\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N), \quad F \mapsto F_\Phi$$

est de même nature que Φ : elle est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si Φ est injective (resp. surjective, resp. bijective).

Notez cependant que, contrairement au cas où $\mathbb{B}=\mathbb{K}$, il n'existe pas de section canonique $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et donc il n'est pas possible, en général, de relever une application lisse sur $\mathbb{B}$ en une application lisse sur $\mathbb{A}$.

Remarque 9.2.2. L'application F_Φ est une « extension scalaire » de F au sens des algébristes.

Démonstration. Soit F une application dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N)$. Alors F est entièrement déterminée par $F\circ\sigma^{\mathbb{A}}_M$. Il s'agit de déterminer une application F_Φ, lisse sur $\mathbb{B}$, telle que

$$\Phi_N \circ F = F_\Phi \circ \Phi_M.$$

En particulier,

$$F_\Phi \circ \sigma^{\mathbb{B}}_M = F_\Phi \circ \Phi_M \circ \sigma^{\mathbb{A}}_M = \Phi_N \circ F \circ \sigma^{\mathbb{A}}_M.$$

Or F_Φ est lisse sur $\mathbb{B}$ donc entièrement déterminée par $F_\Phi\circ\sigma^{\mathbb{B}}_M$, ce qui prouve l'unicité et nous avons :

$$F_\Phi := \mu^{\mathbb{B}}_N \circ \mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\Phi_N \circ F \circ \sigma^{\mathbb{A}}_M).$$

On vérifie facilement que F_Φ est bien lisse sur $\mathbb{B}$. Montrons que $\Phi_N\circ F = F_\Phi\circ\Phi_M$: d'après le théorème 7.2.4 avec $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ à la place de N,

$$\begin{aligned} F_\Phi\circ\Phi_M &= \mu^{\mathbb{B}}_N \circ \mathrm{T}^{\mathbb{B}}\Phi_N \circ \mathrm{T}^{\mathbb{B}}(F\circ\sigma^{\mathbb{A}}_M)\circ\Phi_M \\ &= \mu^{\mathbb{B}}_N \circ \mathrm{T}^{\mathbb{B}}\Phi_N \circ \Phi_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(F\circ\sigma^{\mathbb{A}}_M). \end{aligned}$$

Mais

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}}\Phi_N = (\Phi\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{B}})_N \text{ avec } \Phi\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{B}} : \mathbb{A}\otimes\mathbb{B}\to\mathbb{B}\otimes\mathbb{B}, a\otimes b\to\Phi(a)\otimes b$$

et

$$\Phi_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N} = (\mathrm{id}_{\mathbb{A}}\otimes\Phi)_N,$$

d'où nous déduisons

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}}\Phi_N\circ\Phi_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}N} = (\Phi\otimes\Phi)_N.$$

Or

$$\mu^{\mathbb{B}}_N\circ(\Phi\otimes\Phi)_N = (\mu^{\mathbb{B}}_N\circ\Phi\otimes\Phi)_N = (\Phi\circ\mu^{\mathbb{A}})_N = \Phi_N\circ\mu^{\mathbb{A}}_N$$

puisque

$$\mu^{\mathbb{B}}\circ(\Phi\otimes\Phi) : \mathbb{A}\otimes\mathbb{A}\to\mathbb{B}, \quad a\otimes a'\mapsto\Phi(a)\Phi(a')=\Phi(aa')=\Phi\circ\mu^{\mathbb{A}}.$$

Finalement,

$$F_\Phi\circ\Phi_M = \Phi_N\circ\mu^{\mathbb{A}}_N\circ\mathrm{T}^{\mathbb{A}}(F\circ\sigma^{\mathbb{A}}_M) = \Phi_N\circ F.$$

Prouvons la dernière assertion : l'application

$$F\mapsto\mu^{\mathbb{B}}_M\circ\mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\Phi_N\circ F\circ\sigma^{\mathbb{A}}_M)$$

est de même nature que l'application $F\circ\sigma^{\mathbb{A}}_M\mapsto F_\Phi\circ\sigma^{\mathbb{B}}_M = \Phi_N\circ F\circ\sigma^{\mathbb{A}}_M$, qui est de même nature que l'application Φ_N, qui est elle-même de même nature que Φ. □

Si $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, alors l'application $F \mapsto F_\Phi$ n'est pas l'identité : en effet,

$$F = F_\Phi = \mu_N^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\Phi_N \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}})$$

si et seulement si

$$F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} = \Phi_N \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}},$$

c'est-à-dire, si et seulement si l'image $F \circ \sigma_M^{\mathbb{A}}(M) = F\left(0_M^{\mathbb{A}}\right)$ par F de la base M est invariant par Φ_N.

Dans le cas des extensions polynomiales, le théorème 9.2.1 se traduit en termes de morphismes de fibrés $\mathbb{A}$-lisses :

Théorème 9.2.3. *Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Soient M et N deux variétés lisses sur $\mathbb{K}$. Alors toute application $F : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N$ lisse sur $\mathbb{A}$ induit un morphisme (F, F_Φ) de fibrés $\mathbb{A}$-lisses entre Φ_M et Φ_N.*

9.3 Fibrés Φ-verticaux

Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil de degré j. Alors $\mathbb{V}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil de hauteur j. On définit le fibré Φ-vertical sur une variété M comme étant le fibré $\mathbb{V}$-tangent sur M. Il s'identifie à l'image réciproque de $0_M^{\mathbb{B}}$ par l'application Φ_M.

Définition 9.3.1. *Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. On appelle* foncteur Φ-vertical *le foncteur de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{V}}$ associé à la $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{V}$. Pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, on appelle* fibré Φ-vertical *sur M le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M$.*

Notez que ce fibré existe toujours, et est déterminé de manière entièrement canonique. C'est clairement un sous-fibré de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. En effet, le monomorphisme d'algèbres de Weil $i : \mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A}$ induit, pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, un morphisme injectif de fibrés $i_M : \mathrm{T}^{\mathbb{V}}M \hookrightarrow \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. De plus, c'est un fibré $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$-lisse avec section sur M, donc polynomial de degré j sans terme constant. En particulier, dans le cas d'une extension vectorielle, ce fibré est un fibré vectoriel sur M. Il est isomorphe au fibré

$$\bigcup_{x \in M} (\Phi_M)^{-1}\left(\sigma^{\mathbb{B}}(x)\right).$$

On représente le fibré vertical par une suite exacte de fibrés sur M :

$$\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M \hookrightarrow \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \twoheadrightarrow \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M\,.$$

C'est la version fibrée de la suite exacte précédente.

Exemple 9.3.2. Soit k un entier. L'anneau $\mathbb{K} \oplus \delta^{k+1}\mathbb{K}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{T}\mathbb{K}$, et donc le fibré vertical associé à l'extension vectorielle

$$\mathbb{K} \oplus \delta^{k+1}\mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{J}^{k+1}\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{J}^k\mathbb{K}$$

est canoniquement isomorphe à $\mathrm{T}M$. On obtient alors la suite exacte de fibrés

$$\mathrm{T}M \hookrightarrow \mathrm{J}^{k+1}M \twoheadrightarrow \mathrm{J}^kM.$$

Exemple 9.3.3. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_k$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil graduée. Alors chaque étage

$$\mathbb{A}_i \hookrightarrow \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_{i+1} \twoheadrightarrow \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_i$$

de la tour d'extensions associée à sa graduation (voir proposition 6.5.2) est une extension vectorielle, qui induit un fibré vertical $\mathrm{T}^{\mathbb{K}\oplus\mathbb{A}_i}M$ vectoriel sur M, isomorphe en tant que fibré vectoriel sur M au fibré $\mathrm{T}M \otimes \mathcal{A}_i$ dont la fibre en un point x de M est le module $\mathrm{T}_xM \otimes \mathcal{A}_i$.

Définition 9.3.4. *On appelle* champ Φ-vertical *un champ de $\mathbb{A}$-vecteurs X sur M tel que pour tout x dans M, $X(x)$ appartienne à $\mathrm{T}_x^{\mathbb{V}}M$. On identifie le sous-groupe des champs verticaux au groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$ des sections du fibré Φ-vertical $\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M$.*

Proposition 9.3.5. *Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Alors, pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, la suite de groupes suivante est exacte :*

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M) \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}_{\mathbb{B}}(M)\,.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la suite exacte

$$\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M \hookrightarrow \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \twoheadrightarrow \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M\,.$$

□

Le corollaire suivant décrit la structure des morphismes de fibrés $\mathbb{A}$-lisses entre les fibrés Φ-tangents Φ_M et Φ_N.

Corollaire 9.3.6. *Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Alors, pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, la suite de groupes suivante est exacte :*

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \twoheadrightarrow \mathrm{Diff}_{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M)\,.$$

En particulier, le groupe $\mathrm{InfAut}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{A}}(M) := \mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M)$ des $\mathbb{A}$-difféomorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ au-dessus de l'identité de $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$, est isomorphe au groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$ des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs verticaux.

Démonstration. D'après le théorème 8.2.3, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) = \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M) \rtimes \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M)$$

et

$$\mathrm{Diff}_{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M) = \mathfrak{X}_{\mathbb{B}}(M) \rtimes \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(M).$$

L'assertion est alors une conséquence de la proposition 9.3.5. □

9.4 Φ-sections et relèvements

Nous allons définir la notion de Φ-section dont l'existence permet le relèvement des applications $\mathbb{B}$-lisses entre deux variétés $\mathbb{B}$-tangentes en des applications $\mathbb{A}$-lisses entre variétés $\mathbb{A}$-tangentes. Dans le cas d'une extension polynomiale $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$, l'existence d'une section permet d'écrire le groupe des automorphismes du fibré Φ-tangent comme le produit semi-direct du groupe des $\mathbb{B}$-difféomorphismes de $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ et du groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$ des sections du fibré Φ-vertical $\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M$ de M.

Définition 9.4.1. *Soit $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un (épi)morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Une* Φ-section *sur M, est une section $S_M : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ lisse sur $\mathbb{K}$.*

Le théorème suivant montre que toute Φ-section S_N sur N donne un mécanisme qui permet de relever de manière unique toute application lisse sur $\mathbb{B}$ entre deux variétés $\mathbb{B}$-tangentes $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}N$ en une application $\mathbb{A}$-lisse entre les variétés $\mathbb{A}$-tangentes $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_N$.

Théorème 9.4.2. *Soit $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Soient M et N des variétés lisses sur $\mathbb{K}$. Soit S_N une Φ-section sur N. Alors, pour toute application $\mathbb{B}$-lisse $F : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N$, il existe une unique application $\mathbb{A}$-lisse $F^\Phi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$, au-dessus de F, telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "F^\Phi"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N \\
\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \arrow[r, "F"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N \arrow[u, "S_N"'] \\
M \arrow[u, "\sigma_M^{\mathbb{B}}"'] \arrow[uu, bend left, "\sigma_M^{\mathbb{A}}"]
\end{tikzcd}\ .$$

Démonstration. Soit $F : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N$ une application lisse sur $\mathbb{B}$. Alors F est entièrement déterminée par sa valeur sur $\sigma_M^{\mathbb{B}}(M)$. Il s'agit de déterminer une application F^Φ, lisse sur $\mathbb{A}$, telle que

$$F^\Phi \circ \sigma_M^{\mathbb{A}} = S_N \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{B}}.$$

Or F^Φ est entièrement déterminée par sa valeur sur $\sigma_M^{\mathbb{A}}$, ce qui prouve l'unicité, et on a :

$$F^\Phi = \mu_N^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(S_N \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{B}}),$$

qui est clairement lisse sur $\mathbb{A}$. Montrons de plus que F^Φ est bien au-dessus de F : d'après le théorème 9.2.1, F^Φ est au-dessus de

$$\mu_N^{\mathbb{B}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\Phi_N \circ F^\Phi \circ \sigma_M^{\mathbb{A}}) = \mu_N^{\mathbb{B}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{B}}(\Phi_N \circ S_N \circ F \circ \sigma_M^{\mathbb{B}}) = \mu_N^{\mathbb{B}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{B}}(F \circ \sigma_M^{\mathbb{B}}) = F.$$

□

En utilisant l'isomorphisme (8.1.2) entre $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N)$ et $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{K}}(M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N)$, l'application

$$\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M, \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N),$$

se traduit simplement de la manière suivante :

$$\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{K}}(M, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}N) \to \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{K}}(M, \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N), \quad F \mapsto S_N \circ F.$$

Dans le cas des extensions polynomiales, le théorème 9.2.3 se traduit en termes de morphismes de fibrés $\mathbb{A}$-lisses de la manière suivante.

Corollaire 9.4.3. *Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Soient M et N deux variétés lisses sur $\mathbb{K}$. Soit S_N une Φ-section sur N. Alors toute application $F : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}}N$ lisse sur $\mathbb{B}$ se relève en un morphisme (F^Φ, F) de fibrés $\mathbb{A}$-lisses entre Φ_M et Φ_N.*

Le corollaire suivant décrit la structure du groupe des automorphismes du fibré Φ_M.

Corollaire 9.4.4. *Soit* $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ *une extension polynomiale de* $\mathbb{K}$*-algèbres de Weil. Soit* M *une variété, lisse sur* $\mathbb{K}$*, munie d'une* Φ*-section. Alors la suite exacte suivante est scindée*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M) \arrow[r, hook] & \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Diff}_{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

et $\mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M)$ *est alors le produit semi-direct de* $\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$ *et de* $\mathrm{Diff}_{\mathbb{B}}(\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M)$.

Quatrième partie

Connexions

Chapitre 10

Introduction

10.1 Historique

Dans tout cet historique, nous nous plaçons dans le cadre classique des variétés réelles de dimension finie.

10.1.1 Connexions affines et linéaires sur les fibrés vectoriels

Connexions affines

Historiquement, une des premières notions de connexion sur un fibré apparues en mathématiques est celle de *connexion affine.* Lorsque nous travaillons dans un espace vectoriel, la différentiation des champs de vecteurs se définit de manière naturelle, parce que les espaces tangents en deux points distincts s'identifient par translation. Dans le cas d'une variété différentiable, cette différentiation nécessite de pouvoir comparer des vecteurs tangents en des points distincts. La notion de connexion affine permet de résoudre ce problème en définissant une manière de *connecter* les espaces tangents de la variété. Les connexions affines trouvent leur origine au XIX$^{\text{e}}$ siècle, mais n'ont été formalisées qu'au début du XX$^{\text{e}}$ siècle par Élie Cartan (1869-1951) (voir les articles [Cartan 1923, Cartan 1926]), et par Hermann Weyl (1885-1955). , qui les utilise pour décrire la relativité générale (voir le livre [Weyl 1918])

Les connexions affines sont définies en tant qu'opérateurs différentiels de la manière suivante.

Définition 10.1.1. *Soit M une variété lisse sur $\mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M. Une* connexion affine *sur M est une* dérivée covariante*, c'est-à-dire une application $\mathbb{R}$-bilinéaire*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *∇ est $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$-linéaire en la première variable, c'est-à-dire que*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}), \quad \nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y.$$

2. *∇ vérifie la* règle de Leibniz *pour la seconde variable, c'est-à-dire que*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}), \quad \nabla_X(fY) = df(X)Y + f\nabla_X Y.$$

Les connexions affines permettent l'identification d'espaces tangents, à l'aide de la notion de transport parallèle. Un champ de vecteurs X est dit *parallèle* si ∇X est nul.

Soient $\gamma : I = [a, b] \to M$ une application lisse, et $\mathcal{X}$ un vecteur de $\mathrm{T}_{\gamma(a)}M$. Un champ de vecteurs $X : \gamma(I) \to \mathrm{T}M$ le long de γ est appelé *transport parallèle de $\mathcal{X}$ le long de γ* si X vérifie les conditions suivantes :

$$\forall t \in [a, b], \quad \nabla_{\gamma'(t)} X = 0 \quad et \quad X_{\gamma(a)} = \mathcal{X}.$$

Dans une carte de fibré du fibré tangent, ces conditions sont équivalentes à un système d'équations différentielles. Ce système possède une solution, qui est de plus unique grâce à la donnée de la condition initiale. Notez qu'il n'y a plus de théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles dans le cadre du calcul différentiel sur un anneau quelconque. Dans ce cadre général, nous pouvons définir une dérivée covariante de manière similaire, mais l'existence d'un transport parallèle n'est alors plus garantie.

Le transport parallèle permet de déplacer les vecteurs tangents à une variété, le long d'une courbe, et ce, de manière unique une fois la connexion affine fixée. Chaque transport parallèle définit un isomorphisme linéaire entre les espaces tangents aux points de la courbe. Cet isomorphisme est indépendant de la courbe seulement si la *courbure* de la connexion est nulle. Ainsi, la *courbure* d'une connexion est une obstruction à l'indépendance par rapport à la courbe choisie.

Le *tenseur de courbure* $R := R^\nabla$ d'une connexion affine ∇ sur M est défini de la manière suivante :

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$
$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Pour tous champs de vecteurs X et Y sur M, $R(X, Y)$ est alors un champ d'endomorphismes du fibré tangent $\mathrm{T}M$, c'est-à-dire qu'à chaque champ de vecteurs sur M il associe un nouveau champ de vecteurs sur M. La courbure est, avec la torsion, le principal invariant d'une connexion affine.

La *torsion* $T := T^\nabla$ d'une connexion affine ∇ sur M est définie de la manière suivante :

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Connexions linéaires

Le concept de connexion affine sur les fibrés tangents se généralise de manière naturelle en celui de connexion linéaire sur tout fibré vectoriel. Les connexions linéaires ont été introduites par Jean-Louis Koszul (1921-) dans les années 1950, et permettent de définir une notion de transport parallèle dans tout fibré vectoriel, c'est-à-dire, d'identification linéaire des fibres en différents points.

Définition 10.1.2. *Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel lisse sur $\mathbb{R}$. Une* connexion linéaire *sur E est une dérivée covariante, c'est-à-dire une application $\mathbb{R}$-linéaire*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \otimes \Gamma(E, M) \to \Gamma(E, M), \quad (s, X) \mapsto \nabla_X s$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *$\nabla_X s$ est $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$-linéaire en le champ de vecteurs X,*
2. *$\nabla_X s$ vérifie la règle de Leibniz pour la section s.*

Les connexions affines sur une variété M sont ainsi exactement les connexions linéaires sur le fibré tangent $\mathrm{T}M$.

Le transport parallèle de sections le long de courbes relativement à une connexion linéaire est défini de manière similaire au cas des connexions affines.

La courbure $R := R^\nabla$ d'une connexion linéaire ∇ sur M est définie de manière analogue à celle des connexions affines :

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E, M) \to \Gamma(E, M),$$

$$(X, Y, s) \mapsto R(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s.$$

La courbure est tensorielle et antisymétrique en les champs de vecteurs et peut donc s'interpréter comme une section du fibré

$$\Lambda^2 \left(\mathrm{T}^\star M\right) \otimes \mathrm{End}(E) \to M,$$

où $\mathrm{End}(E)$ désigne le fibré $E \otimes E'$ des endomorphismes de E.

Toute connexion linéaire sur un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ induit un isomorphisme de fibrés sur M

$$\mathrm{T}E \simeq \mathrm{T}M \times_M E \times_M E,$$

ce qui munit le fibré $\mathrm{T}E \to M$ d'une structure de fibré vectoriel. Suivant le livre [Lang 1999], nous appelons cet isomorphisme *décomposition de Dombrowski* du fibré $\mathrm{T}E$ sur M. En particulier, dans le cas du fibré tangent $\mathrm{T}M \to M$, toute connexion affine induit un isomorphisme de fibrés sur M

$$\mathrm{TT}M \simeq \mathrm{T}M \times_M \mathrm{T}M \times_M \mathrm{T}M, \tag{10.1.1}$$

ce qui munit le fibré double tangent d'une structure de fibré vectoriel sur M. C'est le cas qui a été étudié dans l'article [Dombrowski 1962]. Réciproquement, nous pouvons retrouver la connexion à partir d'une telle décomposition.

Pour plus de détails sur les connexions linéaires dans les fibrés vectoriels, voir les livres [Kobayashi, Nomizu 1963], [Husemoller 1966] et [Besse 1978].

10.1.2 Connexions d'Ehresmann

Les connexions (linéaires ou affines) que nous avons présentées concernent uniquement les fibrés vectoriels. Pourtant, la question de l'identification des fibres d'un fibré est un problème très général qui a un sens pour n'importe quel type de fibré. Les *connexions d'Ehresmann* introduites dans l'article [Ehresmann 1950] sont une généralisation des connexions linéaires aux fibrés quelconques. Afin de définir une notion de connexion qui ait un sens pour tous les fibrés, et qui soit une généralisation des connexions linéaires, il faut trouver le bon point de vue et déterminer l'objet à partir duquel il sera possible de retrouver toutes les autres notions usuelles telles que la dérivée covariante et le transport parallèle. Cet objet est la décomposition du fibré tangent $\mathrm{T}E$ d'un fibré $\pi : E \to M$ en *fibré horizontal* et *fibré vertical*, sur E.

Définition 10.1.3. *Soit $\pi : E \to M$ un fibré lisse sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{T}\pi : \mathrm{T}E \to \mathrm{T}M$ est un fibré. L'ensemble $\mathcal{V}E := \{Z \in \mathrm{T}E \mid \mathrm{T}\pi(Z) = 0\}$ est un sous-fibré de $\mathrm{T}E$, appelé* fibré vertical*, et qui est constitué des vecteurs tangents aux fibres de E, c'est-à-dire que pour tout z dans E, la fibre de $\mathcal{V}E$ au point z est isomorphe à $\mathrm{T}_z(E_{\pi(z)})$.*

Ce fibré est déterminé de manière entièrement canonique.

Définition 10.1.4. *Une* connexion d'Ehresmann *sur un fibré $\pi : E \to M$ est la donnée d'un sous-fibré $\mathcal{H}E$ de $\mathrm{T}E$ qui soit complémentaire au fibré vertical, au sens où il existe un isomorphisme de fibrés sur E*

$$\mathrm{T}E \simeq \mathcal{H}E \times_E \mathcal{V}E.$$

En tant que fibré sur M, tout fibré horizontal de E est isomorphe au fibré $\mathrm{T}M \times_M E$. En chaque point z de M, l'espace vectoriel $\mathrm{T}_z E$ est décomposé en la somme directe $\mathcal{H}_z E \oplus \mathcal{V}_z E$. Tout vecteur tangent, ou plus généralement tout champ de vecteurs, peut alors être décomposé en parties verticales et horizontales.

De manière équivalente, une connexion peut être définie à partir d'un connecteur.

Définition 10.1.5. *Un* connecteur *sur un fibré $\pi : E \to M$ est une projection $\mathcal{K} : \mathrm{T}E \to \mathcal{V}E$, c'est-à-dire une application linéaire fibre à fibre, qui vérifie*

$$\forall Z \in \mathrm{T}E, \quad \mathcal{K}(\mathcal{K}(Z)) = \mathcal{K}(Z) \quad \text{et} \quad \forall Z \in \mathcal{V}E, \quad \mathcal{K}(Z) = Z.$$

Le fibré horizontal de E est alors le noyau du connecteur. La donnée du fibré horizontal est équivalente à celle d'un connecteur, défini comme étant la projection fibre à fibre au-dessus de E, sur le fibré vertical, parallèlement au fibré horizontal. Ceci a un sens car les fibrés horizontaux et verticaux sont des fibrés vectoriels sur E.

Dans le cadre classique des variétés réelles de dimension finie, cette notion de connexion donne lieu à un transport parallèle qui permet de relever des courbes de la variété M en des courbes de E de telle sorte que les tangentes aux courbes soient horizontales.

Définition 10.1.6. *Soit $\gamma : I = [a, b] \to M$ une courbe lisse passant par le point $x = \gamma(a)$. Considérons un élément z de E tel que $\pi(z) = x$. Un* relèvement *de γ passant par z est une courbe lisse $\tilde{\gamma} : I \to E$ telle que $\tilde{\gamma}(a) = z$ et pour tout t dans I, $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Un tel relèvement est dit* horizontal *si tous les vecteurs tangents à la courbe $\tilde{\gamma}$ sont dans le fibré horizontal, c'est-à-dire que*

$$\forall t \in I, \quad \tilde{\gamma}'(t) \in \mathcal{H}_{\tilde{\gamma}(t)} E.$$

À partir de l'isomorphisme entre le fibré horizontal et $\mathrm{T}M \times_M E$, on montre que pour tout vecteur X_x de $\mathrm{T}_x M$, il existe un unique relèvement horizontal $\tilde{X}$ de $\mathcal{H}_z E$. Ainsi, les tangentes à une courbe sur M se relèvent de manière unique en un champ de vecteurs horizontal. Cependant, l'existence d'une courbe intégrale associée à ce champ de vecteurs n'est pas garantie. Le relèvement horizontal dépend de la courbe γ. En particulier, l'espace des sections du fibré horizontal n'est pas stable par le crochet de Lie des champs de vecteurs sur E. La courbure d'une connexion d'Ehresmann mesure l'obstruction à cette stabilité.

Définition 10.1.7. *Soit $\mathcal{K}$ un connecteur sur un fibré $\pi : E \to M$. Alors la* courbure de $\mathcal{K}$ *est définie de la manière suivante :*

$$R : \mathfrak{X}(E) \times \mathfrak{X}(E) \to \mathfrak{X}(E), \quad (X, Y) \mapsto \mathcal{K} \circ \left[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\right],$$

où $X^{\mathcal{H}}$ et $Y^{\mathcal{H}}$ désignent les parties horizontales de X et Y.

Par conséquent, la courbure est nulle si et seulement si le fibré horizontal est intégrable au sens de Frobenius.

10.2 Connexions de Weil

Plaçons nous désormais dans notre cadre différentiel général sur un anneau de base admissible $\mathbb{K}$.

Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Alors toute connexion affine sur M (c'est-à-dire toute connexion linéaire sur $\mathrm{T}M$), correspond à un isomorphisme de fibrés sur M

$$\mathrm{TT}M \simeq \mathrm{T}M \times_M \mathrm{T}M \times_M \mathrm{T}M,$$

appelé décomposition de Dombrowski (voir l'équation (10.1.1)). Cet isomorphisme munit le fibré double tangent $\mathrm{TT}M$ d'une structure de fibré vectoriel sur M. Par un procédé d'itération donné dans [Bertram 2008], nous obtenons, à partir d'une telle connexion, une décomposition des fibrés tangents itérés à tout ordre k

$$\mathrm{T}^k M \simeq \underbrace{\mathrm{T}M \times_M \ldots \times_M \mathrm{T}M}_{2^k-1 \text{ fois}},$$

ce qui munit le fibré $\mathrm{T}^k M$ d'une structure de fibré vectoriel sur M. Munir le fibré $\mathrm{J}^k M$ d'une structure de fibré sur M est plus délicat. Afin d'étudier ce problème,nous considérons des décompositions pour tout fibré de Weil $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ sur M, où $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil.

Structures $\mathbb{K}$-linéaires

Soient dans toute la suite $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Nous définissons le fibré *linéaire* associé à $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ comme étant le fibré

$$\mathrm{L}^{\mathbb{A}} M := \mathrm{T}M \otimes \mathring{\mathbb{A}},$$

où la fibre en un point x de $\mathrm{L}^{\mathbb{A}} M$ est le $\mathbb{A}$-module $\mathrm{T}_x M \otimes \mathring{\mathbb{A}}$. Ce fibré est un fibré vectoriel sur M et peut être considéré comme le « vectorialisé » de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$. Une *structure* $\mathbb{K}$*-linéaire* sur un fibré $\mathbb{A}$-tangent $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ est alors un isomorphisme de fibrés $\mathbb{K}$-lisses sur M, entre $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ et $\mathrm{L}^{\mathbb{A}} M$, ce qui munit $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ d'une structure de fibré vectoriel sur M.

Opérateurs de courbure

Le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ des automorphismes de $\mathbb{A}$ agit naturellement sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ et sur $\mathrm{T}M \otimes \mathring{\mathbb{A}}$. Nous définissons les *opérateurs de courbure* comme des obstructions à l'invariance sous l'action de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$. Si une structure linéaire est invariante par un automorphisme Ψ de $\mathbb{A}$, on dit qu'elle est Ψ*-symétrique*. On définit la Ψ*-courbure* R^{Ψ} d'une structure $\mathbb{K}$-linéaire C de la manière suivante :

$$\mathbb{R}^{\Psi} := C^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{T}M} \otimes \Psi^{-1}) \circ C \circ \Psi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M.$$

Nous ne demandons pas que les structures linéaires soient $\mathbb{A}$-polynomiales fibre à fibre. Si c'est le cas, alors toutes les Ψ-courbures sont nulles et C est $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$-équivariant.

Si $\mathbb{A}$ est de plus graduée, alors toute structure $\mathbb{K}$-linéaire sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ qui commute avec l'action de $\mathbb{K}^{\times}$ est un morphisme de fibrés $\mathbb{K}$-polynomiaux sur M. S'il s'agit de plus d'un morphisme spécial (voir la définition B.4.1), alors nous l'appellerons *connexion de Weil* sur le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$.

Connexions polynomiales

Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. On note $\mathbb{V} := \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{V}}$. Une *connexion polynomiale relativement à* Φ, ou Φ*-connexion* est un isomorphisme de fibrés polynomiaux entre les fibrés $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}}M$ sur la base $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$ tel que la restriction à $\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M$ soit l'identité. Le cas principal d'application des connexions polynomiales est le cas où Φ est une extension polynomiale correspondant à un étage d'une tour d'extensions d'une algèbre de Weil. Nous montrons en particulier que la donnée de connexions polynomiales pour chaque étage d'une tour d'extensions de $\mathbb{A}$ permet de construire une structure $\mathbb{K}$-linéaire sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, ce qui permet d'interpréter les connexions polynomiales comme des connexions intermédiaires vers la donnée d'une structure $\mathbb{K}$-linéaire.

Si $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ est une extension vectorielle centrale, alors la donnée d'une Φ-section $S_M : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ du fibré Φ-tangent permet de construire une Φ-connexion sur M, qui soit une translation fibre à fibre au-dessus de $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$.

Dans le cas d'une algèbre de Weil graduée, la donnée de sections $\mathbb{K}^{\times}$-équivariantes, pour chaque étage de la tour d'extensions de $\mathbb{A}$ associée à sa graduation, permet de construire une connexion de Weil sur le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$. En particulier, si nous considérons le fibré des jets, la donnée de sections $\mathbb{K}^{\times}$-équivariantes $S_k : \mathrm{J}^kM \to \mathrm{J}^{k+1}M$ correspondant aux étages

$$\mathbb{K} \oplus \delta^{k+1}\mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{J}^{k+1}\mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathrm{J}^k\mathbb{K}$$

de la tour d'extensions associée à sa graduation, munit le fibré $\mathrm{J}^kM \to M$ d'une connexion de Weil.

Connexions dans les fibrés de jets

Dans la dernière section nous énoncerons que toute section $\mathbb{K}^{\times}$-équivariante $\mathrm{J}M \to \mathrm{J}^2M$ induit des sections $\mathbb{K}^{\times}$-équivariantes $\mathrm{J}^iM \to \mathrm{J}^{i+1}M$, ce qui permet de définir une connexion de Weil sur les fibrés de jets de tout ordre $\mathrm{J}^kM \to M$.

10.3 Connexions de type Ehresmann

Considérons un fibré $\pi : E \to M$ lisse sur $\mathbb{K}$. Une connexion d'Ehresmann sur E permet de décrire la structure du fibré $\mathrm{T}E$ sur la base M. Le fibré T^kE est un fibré à la fois sur la base T^kM, sur la base E, mais également sur la base M. Il en est de même pour le fibré J^kE des jets de E. Nous cherchons à décrire la structure des fibrés T^kE et J^kE sur la base M, en particulier lorsqu'une connexion (usuelle) d'Ehresmann sur E est donnée. Ceci nous amène à l'étude générale du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ sur la base M pour toute algèbre de Weil $\mathbb{A}$.

Fibrés verticaux

Le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré lisse sur $\mathbb{A}$. De plus, si le fibré $\pi : E \to M$ est principal (resp. associé), alors le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est également principal (resp. associé). La base $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ possède une sous-variété nulle $0^{\mathbb{A}}_M$, image de M par la section nulle $\sigma^{\mathbb{A}}_M : M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, ce qui définit le fibré vertical $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi^{-1}\left(0^{\mathbb{A}}_M\right)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[d, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi"] \\
0^{\mathbb{A}}_M \arrow[r, hook] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[d] \\
& M \arrow[ul, hook', "\sigma^{\mathbb{A}}_M"]
\end{tikzcd}
$$

Nous étudions la structure fibrée de $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ sur la base E et sur la base M, en particulier dans le cas où le fibré $\pi : E \to M$ est principal ou associé.

Connexions de type Ehresmann

Un $\mathbb{A}$-*connecteur* sur le fibré $\pi : E \to M$ est une application $\mathcal{K}^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ qui préserve les structures fibrées de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$, sur la base $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et sur la base E, au sens où elle est $\mathbb{A}$-lisse fibre à fibre sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, et polynomiale sans terme constant sur E.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[rr, two heads, "\mathcal{K}^{\mathbb{A}}"] \arrow[dr, "\pi^{\mathbb{A}}_E"] \arrow[dd, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi"'] & & \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E \arrow[dl, "\pi^{\mathbb{A}}_E"'] \arrow[dd, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi"] \\
& E & \\
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[rr, "\sigma^{\mathbb{A}}_M"'] & & 0^{\mathbb{A}}_M
\end{tikzcd}
$$

Un tel $\mathbb{A}$-connecteur est équivalent à un isomorphisme

$$C^{\mathbb{A}} := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi \times_{\mathrm{id}_M} \mathcal{K}^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E,$$

appelé $\mathbb{A}$-*connexion sur le fibré* $E \to M$ ou encore *connexion de type Ehresmann* sur le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to M$.

L'ensemble $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi\right)^{-1}\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M 0^{\mathbb{A}}_E\right)$ est appelé fibré $\mathbb{A}$-horizontal de E et noté $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E$. Une différence importante avec le cas tangent usuel est que la donnée d'un sous-fibré $\mathbb{A}$-horizontal n'est équivalente à la donnée d'une $\mathbb{A}$-connexion que si l'idéal $\mathring{\mathbb{A}}$ est nilpotent d'ordre 2.

Opérateurs de courbure

Suivant le modèle de la théorie de Galois, on peut penser que l'action du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ sur ces données est de la plus grande importance. En effet, pour tout automorphisme Ψ de l'algèbre de Weil $\mathbb{A}$, l'application induite Ψ_M est un difféomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, et l'application induite Ψ_E est un difféomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ qui préserve $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$. La définition suivante de l'*opérateur de courbure* d'une $\mathbb{A}$-connexion $C^{\mathbb{A}}$ relativement à Ψ a donc un sens :

$$R^{\Psi} := \left(C^{\mathbb{A}}\right)^{-1} \circ \left(\Psi_M^{-1} \times_M \Psi_E^{-1}\right) \circ C^{\mathbb{A}} \circ \Psi_E : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E.$$

Une connexion est dite Ψ*-symétrique* si sa Ψ*-courbure* R^{Ψ} est nulle. Les courbures sont donc définies comme étant les obstructions à certaines symétries d'une connexion.

Itération des connexions

Kobayashi a étudié l'itération des connexions dans le cas double tangent dans l'article [Kobayashi 1957]. Si nous disposons d'une $\mathbb{A}$-connexion définie sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ et d'une $\mathbb{B}$-connexion définie sur $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}E$, alors il est possible de construire deux $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})$-connexions sur $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}\left(T^{\mathbb{A}}E\right)$ de manière canonique. Si $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ et si les connexions sont égales, alors ces deux $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{A})$-connexions sont conjuguées par le flip canonique $\tau^{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}$. Nous pouvons faire un choix arbitraire dans la procédure d'itération des connexions et noter $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$ la $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-connexion obtenue par cette itération. On définit alors *la* courbure d'une $\mathbb{A}$-connexion comme étant la τ-courbure de $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$. La courbure d'une $\mathbb{A}$-connexion est alors l'obstruction à la symétrie par le flip de la connexion sur le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}E \to M$.

Plus généralement, il existe plusieurs façons naturelles d'itérer une $\mathbb{A}$-connexion $C^{\mathbb{A}}$ en une $(\mathbb{A} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A})$-connexion. À nouveau, nous pouvons faire un choix arbitraire dans la procédure d'itération. On note $C^{\mathbb{A}\otimes\ldots\otimes\mathbb{A}}$ la connexion ainsi obtenue. Nous définissons les *courbures d'ordre supérieur* comme étant les σ-courbures de $C^{\mathbb{A}\otimes\ldots\otimes\mathbb{A}}$, où σ est un élément du groupe symétrique, qui agit naturellement sur $\mathbb{A} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}$.

Cette manière d'itérer les connexions est de nature « cubique », au sens où nous obtenons des connexions correspondant au produit tensoriel des algèbres de Weil, et ainsi l'action du groupe symétrique Σ_k est mis en avant. Dans une approche « simpliciale », qui reste à développer, ce rôle devrait être pris par les automorphismes de type « gradué », décrits dans le théorème 6.5.6.

Chapitre 11

Connexions sur les fibrés de Weil

11.1 Structure $\mathbb{K}$-linéaire

11.1.1 Fibré linéaire

Définition 11.1.1. *Pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$ et pour toute $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$, on définit le* fibré linéaire *associé à $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ par :*

$$\mathrm{L}^{\mathbb{A}}M := \mathrm{T}M \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}.$$

En utilisant une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{A}$, nous obtenons un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\mathrm{L}^{\mathbb{A}}M = \mathrm{T}M \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}} \simeq \underbrace{\mathrm{T}M \times_M \ldots \times_M \mathrm{T}M}_{n \text{ fois}},$$

où $n+1$ désigne la dimension de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{K}$.

Proposition 11.1.2. *Soient $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Alors le fibré linéaire $\mathrm{L}^{\mathbb{A}}M$ associé à $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré vectoriel $\mathbb{K}$-lisse sur M.*

Démonstration. $\mathrm{L}^{\mathbb{A}}M$ est en fait lui-même un fibré de Weil : c'est le fibré de Weil associé à l'*algèbre de Weil trivialisée* $L(\mathbb{A}) := \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{A}}$, munie du produit nul sur $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$. Sa fibre type est le $\mathbb{A}$-module $V \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}$, où V désigne le modèle de la variété M. Les changements de cartes de $\mathrm{L}^{\mathbb{A}}M$ sont les applications suivantes :

$$U \times (V \times \ldots \times V) \to U \times (V \times \ldots \times V), \quad (x, v_1, \ldots, v_n) \mapsto (\phi(x), d\phi(x)v_1, \ldots, d\phi(x)v_n),$$

où ϕ est un changement de cartes de variété de M. Ces changements de cartes sont lisses sur $\mathbb{K}$, mais pas sur $\mathbb{A}$ en général. De plus, ils sont $\mathbb{A}$-linéaires fibre à fibre sur M. $\square$

Pour toute application $f : M \to N$ lisse sur $\mathbb{K}$, et pour tout point x dans M, l'application linéaire

$$\mathrm{L}^{\mathbb{A}}_x f : \mathrm{T}_x M \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}} \to \mathrm{T}_{f(x)} N \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}$$

est le produit tensoriel $\mathrm{T}_x f \otimes \mathrm{id}_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$.

11.1.2 Structure $\mathbb{K}$-linéaire

Définition 11.1.3. *Soient M une variété lisse sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors une* structure $\mathbb{K}$-linéaire *sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un isomorphisme de fibrés $\mathbb{K}$-lisses sur M*

$$\Gamma : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{L}^{\mathbb{A}}M.$$

On dit qu'une structure $\mathbb{K}$-linéaire est spéciale *si elle est* fibre à fibre l'identité au premier ordre*, au sens où, pour tout point x de M, l'application*

$$\mathrm{T}_{0_x^{\mathbb{A}}}\Gamma_x : \mathrm{T}_{0_x^{\mathbb{A}}}\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M \simeq \mathrm{L}_x^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}_{0_x^{\mathbb{A}}}\left(\mathrm{L}_x^{\mathbb{A}}M\right) \simeq \mathrm{L}_x^{\mathbb{A}}M$$

est l'identité sur $\mathrm{L}_x^{\mathbb{A}}M$.

Montrons que cette propriété d'être spéciale est bien définie, c'est-à-dire que les deux isomorphismes données ci-dessus sont bien définis.

1. Nous avons
$$\mathrm{T}_{0_x^{\mathbb{A}}}\left(\mathrm{L}_x^{\mathbb{A}}M\right) = \mathrm{T}_{0_x^{\mathbb{A}}}\left(\mathrm{T}_xM \otimes \mathring{\mathbb{A}}\right) \simeq \mathrm{T}_xM \otimes \mathring{\mathbb{A}} = \mathrm{L}_x^{\mathbb{A}}M$$
car $T_xM \otimes \mathring{\mathbb{A}}$ est un $\mathbb{A}$-module.
2. Considérons le fibré $\left(\mathrm{T} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\right) M$ sur M. C'est un fibré à la fois sur la base $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et sur la base $\mathrm{T}M$. Sa fibre au-dessus de $0_x \in \mathrm{T}M$, où x est un point de M, est canoniquement isomorphe à $\mathrm{T}\left(\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M\right)$, dont la fibre en $0_x^{\mathbb{A}} \in \mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M$ est égale à $\mathrm{T}_{0_x^{\mathbb{A}}}\left(\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M\right)$. D'autre part, le flip de $\mathrm{T}\mathbb{K}$ et $\mathbb{A}$ induit un isomorphisme de fibrés sur M entre $\left(\mathrm{T} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\right) M$ et $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}\right) M$, qui est à nouveau un fibré à la fois sur la base $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et sur la base $\mathrm{T}M$. Or la fibre en $0_x^{\mathbb{A}}$ de $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}\right) M$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\mathrm{T}_xM)$, dont la fibre en $0_x \in \mathrm{T}_xM$ est égale à $\mathrm{T}_{0_x}^{\mathbb{A}}(\mathrm{T}_xM) \simeq \mathrm{T}_xM \otimes \mathring{\mathbb{A}}$. Finalement, nous obtenons l'isomorphisme
$$\mathrm{T}_{0_x^{\mathbb{A}}}\left(\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M\right) \simeq \mathrm{T}_xM \otimes \mathring{\mathbb{A}} \simeq \mathrm{L}_x^{\mathbb{A}}M.$$

Si une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil est de hauteur 2, alors le fibré $\mathbb{A}$-tangent $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ d'une variété M lisse sur $\mathbb{K}$ est déjà un fibré vectoriel, canoniquement isomorphisme à son fibré $\mathbb{K}$-linéaire. Il s'agit du cas où l'algèbre de Weil est égale à son algèbre de Weil trivialisée.

La terminologie est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 11.1.4. *Soit $\Gamma : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{L}^{\mathbb{A}}M$ une structure $\mathbb{K}$-linéaire sur M telle que Γ soit un morphisme de fibrés $\mathbb{K}$-polynomiaux sur M. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Γ est spéciale, c'est-à-dire fibre à fibre l'identité au premier ordre,*
2. *Γ est un morphisme spécial (voir la définition B.4.1), c'est-à-dire que les parties linéaires des représentations dans des cartes des applications $\mathbb{K}$-polynomiales Γ_x sont l'identité, pour tout x dans M.*

Démonstration. Pour tout point x de M, l'application Γ_x est une application $\mathbb{K}$-polynomiale. Sa différentielle au point $0_x^{\mathbb{A}}$ est égale à sa partie linéaire. Dans une carte, cette partie linéaire est par définition l'identité si et seulement si Γ_x est une application polynomiale spéciale. □

La proposition suivante décrit la structure de l'ensemble des structures $\mathbb{K}$-linéaires spéciales sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.

Proposition 11.1.5. *L'ensemble des structures $\mathbb{K}$-linéaires spéciales sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un espace homogène principal, c'est-à-dire qu'il est stable par le produit ternaire*

$$(\Gamma, \Lambda, \Omega) \mapsto \Gamma \circ \Lambda^{-1} \circ \Omega.$$

Démonstration. À tout isomorphisme de fibrés $\Gamma : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{L}^{\mathbb{A}}M$ sur M, on associe l'application $\underline{\Gamma} : \mathrm{L}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{L}^{\mathbb{A}}M$, qui est définie fibre à fibre de la manière suivante : pour tout point x de M, c'est l'application $\mathrm{T}_{0_x^{\mathbb{A}}}\Gamma_x$. Une telle application Γ est une structure $\mathbb{K}$-linéaire spéciale si et seulement si $\underline{\Gamma} = \mathrm{id}_{\mathrm{L}^{\mathbb{A}}M}$. Si $\underline{\Gamma} = \underline{\Lambda} = \underline{\Omega} = \mathrm{id}_{\mathrm{L}^{\mathbb{A}}M}$, alors

$$\underline{\Gamma \circ \Lambda^{-1} \circ \Omega} = \underline{\Gamma} \circ \underline{\Lambda}^{-1} \circ \underline{\Omega} = \mathrm{id}_{\mathrm{L}^{\mathbb{A}}M},$$

ce qui achève la preuve. □

11.1.3 Opérateurs de courbure

Le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ des automorphismes de $\mathbb{A}$ agit naturellement sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et sur $\mathrm{T}M \otimes \mathring{\mathbb{A}}$, ce qui permet de définir les *opérateurs de courbure* d'une structure $\mathbb{K}$-linéaire.

Définition 11.1.6. *Soit Ψ un élément du groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ d'une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$. Soit Γ une structure $\mathbb{K}$-linéaire sur le fibré $\mathbb{A}$-tangent $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ d'une variété M. Alors on définit la* Ψ-courbure *R^{Ψ} de C comme étant l'application*

$$\mathbb{R}^{\Psi} := \Gamma^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{T}M} \otimes \Psi^{-1}) \circ \Gamma \circ \Psi_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M.$$

Si une structure linéaire est invariante par un automorphisme Ψ de $\mathbb{A}$, on dit qu'elle est Ψ-symétrique*. Une structure $\mathbb{K}$-linéaire est dite* forte *si elle commute à l'action naturelle du groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$.*

La Ψ-courbure d'une structure linéaire est ainsi l'obstruction à sa Ψ-symétrie.

Exemple 11.1.7. Si $M = U$ est une sous-variété ouverte d'un $\mathbb{K}$-module V, alors la carte identité induit une structure $\mathbb{K}$-linéaire forte sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U$ pour toute $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$. Elle est de plus $\mathbb{A}$-polynomiale fibre à fibre et spéciale.

11.1.4 Connexions de Weil

Définition 11.1.8. *Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil graduée, alors une structure $\mathbb{K}$-linéaire spéciale sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ qui commute à l'action naturelle de $\mathbb{K}^{\times}$ est appelée* $\mathbb{A}$-connexion de Weil *sur M ou* connexion de Weil sur le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$.

Proposition 11.1.9. *Soit $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_k$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil graduée. Alors toute $\mathbb{A}$-connexion de Weil Γ sur M est un morphisme spécial de fibrés $\mathbb{K}$-polynomiaux sur M.*

Démonstration. Notons, pour tout entier $1 \leq i \leq k$, $(a_{ij})_{1 \leq j \leq n_i}$ une base de $\mathcal{A}_i$. Considérons la restriction de Γ à la fibre en un point x de M. Cette application est lisse sur $\mathbb{K}$ et commute avec l'action de $\mathbb{K}^{\times}$. Dans une carte, une telle application s'écrit sous la forme

$$\Gamma_x : V \otimes \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus V \otimes \mathcal{A}_k \to V \otimes \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus V \otimes \mathcal{A}_k, \quad (\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k) \mapsto \sum_{i=1}^{n} F_i(\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k),$$

où F_i est une application de $V \otimes \overset{\circ}{\mathbb{A}}$ dans $V \otimes \mathcal{A}_i$. La commutativité avec l'action d'un élément r de $\mathbb{K}^\times$ se traduit de la manière suivante : pour tout entier $1 \leq i \leq k$,

$$F_i(r\boldsymbol{v}_1 + \ldots + r^k \boldsymbol{v}_k) = r^i F_i(\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k).$$

En comparant cette égalité et le développement limité radial multi-variable à l'ordre i suivant

$$F_i(r\boldsymbol{v}_1 + \ldots + r^k \boldsymbol{v}_k) = \sum_{\ell=0}^{i} r^\ell F_i^{\langle \ell \rangle}(0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell; \boldsymbol{0}) + r^{i+1} S_{i+1}(0, \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{0}; \boldsymbol{0}, r),$$

nous obtenons, par unicité du développement limité radial multivariable (théorème 4.1.2),

$$F_i(\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_k) = F_i^{\langle i \rangle}(0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i; \boldsymbol{0})$$

qui est $\mathbb{K}$-polynomial en $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$, d'après le théorème 5.1.3. □

Exemple 11.1.10. Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Une *connexion multi-linéaire* sur $\mathrm{T}^k M$ (voir section 16.1 du livre [Bertram 2008]) est une connexion de Weil, non nécessairement forte. Pour $k = 2$, les *connexions linéaires* sur $\mathrm{TT}M$ sont des structures $\mathbb{K}$-linéaires. En effet, les connexions multi-linéaires sont en particulier des morphismes $\mathbb{K}$-polynomiaux spéciaux entre $\mathrm{T}^k M$ et $\mathrm{T}M \otimes \left(\overset{\circ}{\mathrm{T}^k \mathbb{K}}\right)$ qui commutent avec l'action de $\mathbb{K}^\times$.

11.2 Connexions polynomiales

Considérons, dans toute la suite, une variété M lisse sur $\mathbb{K}$.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, l'étude des connexions polynomiales va nous permettre de mieux comprendre les structures $\mathbb{K}$-linéaires. Une application importante sera le cas où $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ est une extension vectorielle centrale, et en particulier, un étage de la tour d'extensions d'une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil associée à son drapeau canonique, ou à sa graduation si elle est graduée. Dans ce cas, la donnée de connexions polynomiales sur une variété M à chaque étage de la tour permet de définir une structure $\mathbb{K}$-linéaire sur le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \to M$.

Définition 11.2.1. *Soit $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}$ une extension polynomiale de degré j de $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Une* connexion polynomiale*, ou* Φ-connexion *C^Φ sur M est la donnée d'un isomorphisme de fibrés $\mathbb{K}$-polynomiaux de degré j sur $\mathrm{T}^{\mathbb{B}} M$*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M \arrow[rr, "C^\Phi"] \arrow[dr, "\Phi_M"'] & & \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}} M \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{\mathrm{T}^{\mathbb{B}} M}"] \\ & \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M & \end{tikzcd} ,$$

tel que la restriction de C^Φ à $\mathrm{T}^{\mathbb{V}} M$ soit l'identité. Toute Φ-connexion induit une Φ-section sur M, c'est-à-dire une section $S_M : \mathrm{T}^{\mathbb{B}} M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$ lisse sur $\mathbb{K}$. On appelle fibré Φ-horizontal *sur M le sous-fibré $S_M(\mathrm{T}^{\mathbb{B}} M)$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M$, isomorphe à $\mathrm{T}^{\mathbb{B}} M$.*

Notez qu'une connexion polynomiale n'est pas un morphisme de fibrés $\mathbb{K}$-polynomiaux sur M en général.

Remarque 11.2.2. Une extension polynomiale $\mathbb{V} \to \mathbb{A} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{B}$ scindée, de section $s : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, induit une Φ-connexion canonique pour toute variété M lisse sur $\mathbb{K}$, définie par $C^\Phi := \Phi_M \times_{\mathrm{id}_M} s_M$, où Φ_M et s_M sont les applications induites respectivement par Φ et s.

Théorème 11.2.3. *Soit $\mathbb{V} \to \mathbb{A} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{B}$ une extension vectorielle centrale. Alors toute Φ-section $S_M : \mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ telle que $S_M \circ \sigma_M^{\mathbb{B}} = \sigma_M^{\mathbb{A}}$ induit une Φ-connexion, qui est une translation fibre à fibre sur $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$.*

Démonstration. Dans une carte, en identifiant $U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}}$ et le sous-ensemble $U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{H}}}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U = U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{H}}} \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$, où $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$ est un supplémentaire de $\mathbb{V} = \mathbb{K} \oplus \overset{\circ}{\mathbb{V}}$ dans $\mathbb{A}$, une telle section S_M s'écrit sous la forme

$$U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}} \to U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}} \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}, \quad \left(x, x_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}}\right) \mapsto \left(x, x_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}}, F_x\left(x_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}}\right)\right).$$

Cette application permet de construire l'application suivante

$$U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}} \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \to U \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}} \times V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}, \quad \left(x, x_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}}, x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) \mapsto \left(x, x_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}}, x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} + F_x\left(x_{\overset{\circ}{\mathbb{B}}}\right)\right).$$

qui définit une translation fibre à fibre entre les fibrés affines $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}}M$ sur la base $\mathrm{T}^{\mathbb{B}}M$. La condition $S_M \circ \sigma_M^{\mathbb{B}} = \sigma_M^{\mathbb{A}}$ montre que la restriction à $\mathrm{T}^{\mathbb{V}}M$ est bien l'identité. Le caractère central de l'extension assure qu'il s'agit bien d'une translation fibre à fibre. $\square$

Exemple 11.2.4. Considérons l'exemple double tangent.

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{A} := \mathrm{T}^2\mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\mathbb{K} \oplus \varepsilon_2\mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{B} := \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\mathbb{K} \oplus \varepsilon_2\mathbb{K}$$

est l'extension vectorielle centrale associée à la graduation de $\mathrm{T}^2\mathbb{K}$. Dans une carte, toute Φ-section

$$S_M : \mathrm{T}^{\mathbb{K}\oplus\varepsilon_1\mathbb{K}\oplus\varepsilon_2\mathbb{K}}M \simeq \mathrm{T}^{(\mathbb{K}\oplus\varepsilon_1\mathbb{K})\oplus_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\oplus\varepsilon_2\mathbb{K})}M \simeq \mathrm{T}M \times_M \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^2M$$

est de la forme

$$U \times V_1 \times V_2 \to U \times V_1 \times V_2 \times V_{12}, \quad (x, v_1, v_2) \mapsto (x, v_1, v_2, F_x(v_1, v_2)),$$

où $F_x : V_1 \times V_2 \to V_{12}$ est une application lisse sur $\mathbb{K}$. Elle s'annule en $(0, 0)$ si S_M vérifie la relation $S_M \circ \sigma_M^{\mathbb{B}} = \sigma_M^{\mathbb{A}}$. On dit qu'une telle section est un *champ de vecteurs du second ordre* (voir le livre [Lang 1999]).

Corollaire 11.2.5. *Soit $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \ldots \oplus \mathcal{A}_k$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil graduée. Pour tout entier $1 \leq i \leq k-1$, on note $\mathbb{B}_i$ l'algèbre graduée quotient $\mathbb{A}/\left(\mathcal{A}_{i+1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_k\right)$, identifié en tant que $\mathbb{K}$-module à $\mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_i$. Alors, pour tout entier $1 \leq i \leq k-1$, toute section $\mathbb{K}^\times$-équivariante*

$$S_i : \mathrm{T}^{\mathbb{B}_i}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}_{i+1}}M$$

induit une connexion $\mathbb{K}^\times$-équivariante

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}_{i+1}}M \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{B}_i}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{K}\oplus\mathcal{A}_{i+1}}M,$$

relativement à l'extension vectorielle centrale

$$\mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_{i+1} \hookrightarrow \mathbb{B}_{i+1} \twoheadrightarrow \mathbb{B}_i,$$

où $\mathcal{A}_{i+1}$ est munie du produit nul. De plus, cette connexion est un morphisme spécial de fibrés $\mathbb{K}$-polynomiaux sur M.

Démonstration. Si la section S_i est $\mathbb{K}^\times$-équivariante, alors en particulier elle vérifie la condition $S_i \circ \sigma_M^{\mathbb{B}_i} = \sigma_M^{\mathbb{B}_{i+1}}$. On applique alors le théorème précédent. Dans une carte, l'application S_i est de la forme

$$S_i : V \otimes \mathbb{B}_i \to V \otimes \mathbb{B}_i \times V \otimes \mathcal{A}_{i+1}, \quad \boldsymbol{v}_{\mathbb{B}_i} \mapsto \left(\boldsymbol{v}_{\mathbb{B}_i}, F\left(\boldsymbol{v}_{\mathbb{B}_i}\right)\right).$$

Par $\mathbb{K}^\times$-équivariance, on montre que F est polynomiale, sans terme constant ni partie linéaire, de manière analogue à la preuve de la proposition 11.1.9. Par conséquent, la connexion induite C_i, qui s'écrit dans une carte sous la forme

$$C_i : V \otimes \mathbb{B}_i \times V \otimes \mathcal{A}_{i+1} \to V \otimes \mathbb{B}_i \times V \otimes \mathcal{A}_{i+1}, \quad \left(\boldsymbol{v}_{\mathbb{B}_i}, \boldsymbol{v}_{\mathcal{A}_{i+1}}\right) \mapsto \left(\boldsymbol{v}_{\mathbb{B}_i}, \boldsymbol{v}_{\mathcal{A}_{i+1}} + F\left(\boldsymbol{v}_{\mathbb{B}_i}\right)\right),$$

est $\mathbb{K}$-polynomiale sur M, et sa partie linéaire est l'identité, ce qui revient à dire que c'est une application polynomiale spéciale fibre à fibre sur M. Elle est de plus clairement $\mathbb{K}^\times$-équivariante. □

L'exemple fondamental est celui des algèbres de jets.

Exemple 11.2.6. La suite suivante est une extension vectorielle centrale

$$\mathbb{K} \oplus \delta^{k+1}\mathbb{K} \longrightarrow \mathrm{J}^{k+1}\mathbb{K} \xrightarrow{\Phi_k} \mathrm{J}^k\mathbb{K}.$$

Toute Φ_k-section $S_M : \mathrm{J}^k M \to \mathrm{J}^{k+1} M$ induit une Φ_k-connexion. En particulier, pour $k = 1$, une Φ_1-section est de la forme suivante dans une carte :

$$U \times V \to U \times V \times V, \quad (x, v) \mapsto (x, v, F_x(v)),$$

où $F_x : V \to V$ est une application lisse sur $\mathbb{K}$ quelconque. Si la section Φ_1 est $\mathbb{K}^\times$-équivariante, alors F_x est une forme quadratique.

Donnons un exemple relatif aux anneaux tangents itérés.

Exemple 11.2.7. Considérons l'anneau double tangent. La suite suivante est une extension vectorielle centrale de $\mathrm{T}^2\mathbb{K}$

$$\mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K} \longrightarrow \mathrm{T}^2\mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\mathbb{K} \oplus \varepsilon_2\mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbb{K} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{K} \oplus \varepsilon_1\mathbb{K} \oplus \varepsilon_2\mathbb{K}.$$

Par conséquent, toute Φ-section

$$S_M : \mathrm{T}^{\mathbb{K}\oplus\varepsilon_1\mathbb{K}\oplus\varepsilon_2\mathbb{K}} M \simeq \mathrm{T}^{(\mathbb{K}\oplus\varepsilon_1\mathbb{K})\oplus_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\oplus\varepsilon_2\mathbb{K})} M \simeq \mathrm{T}M \times_M \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^2 M$$

qui commute à l'action de $\mathbb{K}^\times$, induit une Φ-connexion. Dans une carte, une telle section est de la forme

$$U \times V_1 \times V_2 \to U \times V_1 \times V_2 \times V_{12}, \quad (x, v_1, v_2) \mapsto (x, v_1, v_2, B_x(v_1, v_2)),$$

où $B_x : V_1 \times V_2 \to V_{12}$ est une application $\mathbb{K}$-bilinéaire par $\mathbb{K}^\times$-équivariance. Cette notion correspond à la section du *morphisme de frontière* de $\mathrm{TT}M$, introduit dans le livre [White 1982]. Notez qu'une telle section induit une $\mathrm{J}^2\mathbb{K}$-connexion sur M si et seulement si elle est invariante par le flip $\tau^{\mathrm{T}\mathbb{K}}$ de $\mathrm{T}\mathbb{K}$, c'est-à-dire si et seulement si elle est de τ-courbure nulle.

11.3 Application aux tours d'extensions

Théorème 11.3.1. *Soient $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Considérons une tour d'extensions vectorielles de $\mathbb{A}$.*

$$\mathbb{V}_1 \hookrightarrow \mathbb{A} \overset{\Phi_1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}_1$$

$$\mathbb{V}_2 \hookrightarrow \mathbb{B}_1 \overset{\Phi_2}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{V}_{k-1} \hookrightarrow \mathbb{B}_{k-2} \overset{\Phi_{k-1}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}_{k-1}$$

$$\mathbb{V}_k \hookrightarrow \mathbb{B}_{k-1} \overset{\Phi_k}{\twoheadrightarrow} \mathbb{B}_k = \mathbb{K}$$

La donnée d'une Φ_i-connexion C^i de M, pour tout entier $1 \leq i \leq k$, permet de construire une structure $\mathbb{K}$-linéaire sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.

Démonstration. Supposons que nous disposons, pour chaque étage de cette tour, d'une Φ_i-connexion $C_i : \mathrm{T}^{\mathbb{B}_{i-1}}M \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}_i}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}_i}M$. Alors nous obtenons

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M & \overset{C_1}{\simeq} & \mathrm{T}^{\mathbb{B}_1}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}_1}M \\
 & \overset{C_2 \times_{\mathrm{id}_M} \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{V}_1}M}}{\simeq} & \left(\mathrm{T}^{\mathbb{B}_2}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}_2}M\right) \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}_1}M \\
 & \vdots & \\
 & \simeq & \left(\mathrm{T}^{\mathbb{K}}M \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}_k}M\right) \times_M \ldots \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}_1}M \\
 & \simeq & \mathrm{T}^{\mathbb{V}_k}M \times_M \ldots \times_M \mathrm{T}^{\mathbb{V}_1}M \\
 & \simeq & \mathrm{T}^{\mathbb{V}_k \oplus_{\mathbb{K}} \ldots \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_1}M \text{ car } \mathrm{T}^{\mathbb{K}}M = M \\
 & \simeq & \mathrm{T}M \otimes \left(\mathring{\mathbb{V}}_k \oplus_{\mathbb{K}} \ldots \oplus_{\mathbb{K}} \mathring{\mathbb{V}}_1\right) \text{ car } (\mathbb{V}_k \oplus_{\mathbb{K}} \overset{\circ}{\ldots} \oplus_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_1) = \mathring{\mathbb{V}}_k \oplus_{\mathbb{K}} \ldots \oplus_{\mathbb{K}} \mathring{\mathbb{V}}_1 \\
 & \simeq & \mathrm{T}M \otimes \mathring{\mathbb{A}}.
\end{array}$$

□

Corollaire 11.3.2. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil graduée $\mathbb{A} = \bigoplus_{i=0}^{k} \mathcal{A}_i$. Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. La donnée d'une Φ_i-section S_i de M, $\mathbb{K}^{\times}$-équivariante, pour tout entier i, où Φ_i est l'extension vectorielle centrale*

$$\mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_{i+1} \hookrightarrow \bigoplus_{j=0}^{i+1} \mathcal{A}_j \overset{\Phi_i}{\twoheadrightarrow} \bigoplus_{j=0}^{i} \mathcal{A}_j,$$

décrite à la proposition 6.5.2, munit $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ d'une connexion de Weil.

Démonstration. On applique le corollaire 11.2.5 et on obtient une Φ_i-connexion à partir de la section S_i, pour tout entier i. De plus, si une section est $\mathbb{K}^{\times}$-équivariante, la connexion induite l'est également. Enfin, si toutes les connexions sont $\mathbb{K}^{\times}$-équivariantes, la structure $\mathbb{K}$-linéaire construite est également $\mathbb{K}^{\times}$-équivariante. Elle est de plus spéciale. □

11.4 Résultat complémentaire

Théorème 11.4.1. *Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$. Alors toute section $\mathbb{K}^\times$-équivariante $S : \mathrm{J}M \to \mathrm{J}^2M$ induit une connexion de Weil sur le fibré $\mathrm{J}^kM \to M$ pour tout entier k.*

Nous disposons d'une preuve longue et calculatoire de ce théorème et avons fait le choix de ne pas l'intégrer dans cette thèse. Elle sera publiée ultérieurement. L'idée de la preuve est la suivante : toute section $\mathbb{K}^\times$-équivariante de $\mathrm{J}M$ dans J^2M induit, pour tout entier naturel k, une section $\mathbb{K}^\times$-équivariante de J^kM dans $\mathrm{J}^{k+1}M$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire précédent. Pour déterminer ces sections, nous revenons au calcul différentiel et nous construisons, pour des éléments $\boldsymbol{s} = (\underline{\boldsymbol{s}}, s_{k+1})$ non singuliers, des sections $\mathbb{K}^\times$-équivariantes, de $\mathrm{J}^k_{\underline{\boldsymbol{s}}}M$ dans $\mathrm{J}^{k+1}_{\boldsymbol{s}}M$. Nous considérons une famille de telles connexions, puis nous les contractons, jusqu'à $\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$, de manière continue et obtenons ainsi des sections $\mathbb{K}^\times$-équivariantes de J^kM dans $\mathrm{J}^{k+1}M$.

Notez que le point fort de ce résultat est qu'il est valable en toute caractéristique. Dans le cas de la caractéristique nulle, on peut réaliser $\mathrm{J}^k\mathbb{K}$ comme l'ensemble des points fixes de $\mathrm{T}^k\mathbb{K}$ sous l'action du groupe symétrique Σ_k, ce qui n'est plus vrai en caractéristique quelconque.

Chapitre 12

Connexions de type Ehresmann

12.1 Structures fibrées de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$

Cette section est consacrée à l'étude de l'extension d'un fibré $\pi : E \to M$ par une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$ et des structures fibrées qui en découlent.

Commençons par fixer les notations : soient, dans toute la suite, une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil $\mathbb{A}$ de hauteur k et $\pi : E \to M$ un fibré $\mathbb{K}$-lisse avec atlas sur une variété M modelée sur un $\mathbb{K}$-module V, de fibre type F, modelée sur un $\mathbb{K}$-module W, et de groupe structural G agissant sur F par l'action ρ.

Nous avons étudié la structure de variété lisse sur $\mathbb{A}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$, ainsi que sa structure fibrée sur la base E. Mais $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ n'est pas seulement un fibré sur la base E : c'est également un fibré sur la base $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et sur la base M. En effet, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[dl, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi"'] \arrow[dr, "\pi^{\mathbb{A}}_E"] \arrow[dd] & \\
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[dr, "\pi^{\mathbb{A}}_M"'] & & E \arrow[dl, "\pi"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, toutes les flèches sont des projections de fibrés. Nous avons déjà étudié les fibrés $\mathbb{A}$-tangents $\pi^{\mathbb{A}}_M : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ et $\pi^{\mathbb{A}}_E : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to E$. Nous allons étudier le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, et montrer que ses caractéristiques sont données de manière fonctorielle comme les « caractéristiques tangentes » de celles du fibré $\pi : E \to M$.

La structure qui nous intéresse le plus est la structure fibrée de $T^{\mathbb{A}}E$ sur M, la plus riche de toutes. Elle comprend les structures fibrées de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ sur la base M et de E sur la base M.

Pour résumer, nous allons prouver que $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ possède les structures fibrées suivantes :

1. *sur* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *:* une structure de fibré $\mathbb{A}$-lisse $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ de fibre type $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ (et, si G est un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$, de groupe structural $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$), ce qui munit chaque fibre d'une structure de variété lisse sur $\mathbb{A}$,
2. *sur* E *:* une structure de fibré polynomial $\mathbb{A}$-lisse sur E avec section, c'est-à-dire sans terme constant,

3. *sur M :* une structure décrite dans la section 12.1.2, et dont un groupe structural, noté $G^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E,M}$ contient des groupes structuraux de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ sur M, de E sur M, et un groupe qui met en jeu ces deux structures.

Rappelons les notations utilisées pour les fibrés : on note
- $\alpha_{ij} : V_{ij} \times F \to V_{ji} \times F$ les changements de cartes de fibré,
- $\phi_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}$ les changements de cartes de variété de M,
- $\gamma_{ij} : V_{ij} \to G$ les fonctions de transition,
- $\beta_{ij} : V_{ij} \times F \to F, (x, y) \mapsto \rho(\gamma_{ij}(x))y$ les données de recollement.

Nous supprimons la notation de l'indice ij pour simplifier. Nous écrivons $\rho(\gamma(x))y =: \gamma(x)y$ et nous considérons G comme un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$.

Rappelons que l'espace total $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ est construit par cocycles. Afin de le connaître, nous devons déterminer ses changements de cartes en tant que variété lisse sur $\mathbb{A}$. Ce sont précisément les applications $\mathbb{A}$-tangentes des changements de cartes de E en tant que variété lisse sur $\mathbb{K}$, changements de cartes provenant des cartes de fibré de $\pi : E \to M$. Nous obtenons les applications lisses sur $\mathbb{A}$ de la forme suivante :

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\phi(\boldsymbol{x}), \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right).$$

Cette application est la composée $F_2 \circ F_1$ des applications lisses sur $\mathbb{A}$ suivantes :

$$F_1 : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \left(\boldsymbol{x}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right)$$

et

$$F_2 : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\right).$$

La première est une action sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$, dépendant à la fois d'éléments de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ et de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}V$, alors que la seconde est une action sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}V$, dépendant seulement d'éléments de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}V$.

Notez que les changements de cartes de variété de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ sont à la fois les changements de cartes de fibré de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ sur M, sur E et sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.

12.1.1 Structure fibrée de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E$

Les structures fibrées de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ sur la base $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et sur la base E induisent une structure fibrée sur le produit fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E$ sur M, que nous allons étudier ici.

Proposition 12.1.1. *Soient E un fibré $\mathbb{K}$-lisse sur la variété M et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors*

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi \times_{\mathrm{id}_M} \pi_E^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E$$

est un fibré lisse sur $\mathbb{K}$, de fibre type $W_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$, $\mathbb{K}$-polynomial de degré k, où W désigne le modèle de la fibre type F du fibré $\pi : E \to M$.

Démonstration. Les fonctions de transition $\gamma^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E}$ du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E$ sont déterminées, pour tout point $(\boldsymbol{x}, y)$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \times F$, par :

$$\gamma^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E}(\boldsymbol{x}, y) : W_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \to W_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}},$$

$$\left(y_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta\left(\boldsymbol{x}, \left(y, y_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)\right) = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{(x,y)}\beta\left(x_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}, y_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right).$$

qui est clairement polynomiale, éventuellement avec terme constant. $\square$

12.1.2 Structure fibrée de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ sur M

Nous allons étudier la structure fibrée de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ sur M et prouver le théorème suivant :

Théorème 12.1.2. *Soit E un fibré $\mathbb{K}$-lisse sur la variété M, de groupe structural G, et soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors le groupe*

$$G^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E,M} := \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}^{k}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0 \rtimes \left(\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^{k}(V)_0 \times G\right),$$

est un groupe structural du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to M$, pour l'action décrite ci-dessous, où k désigne la hauteur de $\mathbb{A}$, où $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}^{k}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0$ désigne le groupe des applications polynomiales de degré au plus k et sans terme constant, et où $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^{k}(V)_0$ désigne le groupe des applications polynomiales inversibles de degré au plus k et sans terme constant.

Les groupes $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^{k}(V)_0$ et G sont des groupes structuraux respectifs des fibrés $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ et $E \to M$. Le groupe $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}^{k}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0$ se révèlera être le modèle de l'espace homogène principal des $\mathbb{A}$-connexions au théorème 12.3.11. La structure de produit semi-direct est celle définie dans la preuve ci-dessous.

Démonstration. Nous allons commencer par étudier les fonctions de transition puis les actions des groupes $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}^{k}(V)_0$, G et $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}^{k}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0$ sur la fibre type, et nous déterminerons la structure de produit semi-direct.

1. **Fonctions de transition.**
   La fibre type du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to M$ est clairement $V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$. Fixons un élément x de M. Tout élément $\boldsymbol{x}$ de $\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M$ se décompose sous la forme $\boldsymbol{x} = x + x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}$, avec $x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}$ dans $V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}$. Considérons les fonctions de transition du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to M$:

   $$\gamma^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E,M}(x) : V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \boldsymbol{y}\right) \mapsto \left(\left(\mathrm{Tay}_x^k \phi\right)_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right).$$

   Cette application est la composée $F_3 \circ F_2 \circ F_1$ des trois applications lisses sur $\mathbb{A}$ suivantes :
   (a)
   $$F_1 : V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \boldsymbol{y}\right) \mapsto \left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\gamma(x))\boldsymbol{y}\right),$$
   où l'application
   $$\gamma(x) : F \to F,$$
   fonction de transition du fibré $\pi : E \to M$, est un élément du groupe structural $G \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$.
   (b)
   $$F_2 : V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \boldsymbol{y}\right) \mapsto \left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta\left(\boldsymbol{x}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\gamma(x)^{-1})\boldsymbol{y}\right)\right).$$
   L'application
   $$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \boldsymbol{y} \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta\left(\boldsymbol{x}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\left(\gamma(x)^{-1}\right)\boldsymbol{y}\right)$$

est lisse sur $\mathbb{A}$ et au-dessus de F, puisqu'elle est au dessus de l'application

$$y \mapsto \beta\left(x, \gamma(x)^{-1}y\right) = \gamma(x)\gamma(x)^{-1}y = y.$$

Or une application lisse sur $\mathbb{A}$, de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$, au-dessus de F, est par définition un élément de $\mathrm{InfAut}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F)$. Ainsi, d'après le théorème 8.2.2, cette application est l'extension d'un élément de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)$, à savoir :

$$F_2 \circ \sigma_F^{\mathbb{A}} : F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad y \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta\left(\boldsymbol{x}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\left(\gamma(x)^{-1}\right)(y, \mathbf{0})\right) = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta\left(\boldsymbol{x}, (\gamma(x)^{-1}y, \mathbf{0})\right),$$

c'est-à-dire, de la section

$$F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad y \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{(x,\gamma(x)^{-1}y)}\beta\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}}, \mathbf{0}\right).$$

De plus, l'application

$$\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \to \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F), \quad \underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}} \mapsto \left(y \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{(x,\gamma(x)^{-1}y)}\beta\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}}, \mathbf{0}\right)\right)$$

est $\mathbb{A}$-polynomiale de degré au plus k et sans terme constant, car l'application suivante l'est également pour tout y dans F

$$\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}} \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{(x,\gamma(x)^{-1}y)}\beta\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}}, \mathbf{0}\right).$$

C'est alors un élément du groupe $\mathrm{Pol}^k\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0$.

(c)
$$F_3 : \underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to \underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}}, \boldsymbol{y}\right) \mapsto \left(\left(\mathrm{Tay}_x^k\phi\right)_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}}\right), \boldsymbol{y}\right).$$

L'application

$$\mathrm{Tay}_x^k\phi : V \to V$$

est un élément de $\mathrm{GP}^k(V)_0$.

2. **Actions de groupes.**
Nous venons ainsi de prouver que le groupe engendré par les groupes G, $\mathrm{GP}^k(V)_0$ et $\mathrm{Pol}^k\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0$, vus comme sous-groupes de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right)$ via les actions décrites ci-dessous, est un groupe structural du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to M$.

   (a) *Le groupe* $G < \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$. Son action sur $\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ est donnée par :

$$G \times \left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right) \to \underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \left(A, \left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}}, \boldsymbol{y}\right)\right) \mapsto \left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{x}}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}A\boldsymbol{y}\right).$$

   G peut être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right)$ *via* le morphisme de groupes

$$G \to \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}\left(\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right), \quad A \mapsto \left(\mathrm{id}_{\underset{\mathbb{A}}{\overset{\circ}{V}}}, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}A\right).$$

(b) *Le groupe* $\mathrm{Pol}^k\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0$. La structure de groupe sur cet ensemble est définie point par point à l'aide de la structure de groupe de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)$. Son action sur $V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ est donnée par :

$$\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0 \times \left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right) \to V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \left(f, \left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \boldsymbol{y}\right)\right) \mapsto \left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, (f(x))^{\mathbb{A}}\boldsymbol{y}\right),$$

où $(f(x))^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ désigne la $\mathbb{A}$-extension de $f(x) : F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$. Ce groupe peut être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right)$ *via* le morphisme de groupes

$$\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0 \to \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right), \quad f \mapsto \left(\left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \boldsymbol{y}\right) \mapsto \left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, (f(x))^{\mathbb{A}}\boldsymbol{y}\right)\right).$$

(c) *Le groupe* $\mathrm{GP}^k(V)_0$. Son action sur $V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ est donnée par :

$$\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)_0 \times V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \quad \left(P, x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \boldsymbol{y}\right) \mapsto \left(P_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}\left(x_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}\right), \boldsymbol{y}\right).$$

Ce groupe peut être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right)$ *via* le morphisme de groupes

$$\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)_0 \to \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}} \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right), \quad P \mapsto \left(P_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F}\right).$$

3. **Produit semi-direct.**
Finalement, le groupe

$$G^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E,M} :=< G, \mathrm{GP}^k(V)_0, \mathrm{Pol}^k\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0 > .$$

est un groupe structural du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to M$. De plus, les groupes G et $\mathrm{GP}^k(V)_0$ commutent trivialement. Nous avons la suite exacte scindée suivante :

$$\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0 \hookrightarrow G^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E,M} \twoheadrightarrow \mathrm{GP}^k(V)_0 \times G.$$

Finalement,

$$G^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E,M} = \mathrm{Pol}^k\left(V_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0 \rtimes \left(\mathrm{GP}^k(V)_0 \times G\right),$$

ce qui achève la preuve du théorème.

□

12.1.3 Structure fibrée sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$

Les changements de cartes $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha$ de variété de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ sont bien lisses sur $\mathbb{A}$ et au-dessus des changements de cartes $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\phi$ de variété de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, également lisses sur $\mathbb{A}$. Ce sont donc bien des cartes de fibré lisse sur $\mathbb{A}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, qui est ainsi un fibré lisse sur $\mathbb{A}$, de fibre type $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$.

Considérons ses fonctions de transition :

$$\gamma^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E,\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \to \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right), \quad \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta\left(\boldsymbol{x}, \cdot\right).$$

Notez que, si G est un groupe structural de Lie sur $\mathbb{K}$ du fibré $E \to M$, alors les fonctions de transition peuvent être interprétées de la manière suivante :

$$\gamma^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E,\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}G, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\gamma^{E,M}(\boldsymbol{x}),$$

où $\gamma^{E,M}$ désigne les fonctions de transition du fibré $\pi : E \to M$, et le groupe $\mathbb{A}$-tangent $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ est un groupe structural du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.

Le foncteur $T^{\mathbb{A}}$ est ainsi un foncteur de la catégorie des fibrés lisses sur $\mathbb{K}$ dans celle des fibrés lisses sur $\mathbb{A}$:

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} : \mathcal{B}un_{\mathbb{K}} \to \mathcal{B}un_{\mathbb{A}}.$$

Remarque 12.1.3. Puisque le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ possède une structure de fibré lisse sur $\mathbb{A}$, alors chaque fibre est $\mathbb{A}$-difféomorphe à la fibre type $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ et possède elle-même une structure de variété lisse sur $\mathbb{A}$, ce qui se révélera important lorsque nous considérerons les connexions.

Extension des fibrés principaux

Théorème 12.1.4. *Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$. Soit $p : P \to M$ un fibré G-principal lisse sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Alors $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}p : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}P \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$-principal.*

Démonstration. Il est immédiat, d'après les changements de cartes de variété de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P$, que $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}p : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}P \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré lisse sur $\mathbb{A}$, $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$-principal. De plus, les fonctions de transition sont :

$$\gamma^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P,\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \to \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G), \quad \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta(\boldsymbol{x}, \cdot).$$

Comme G est un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$, les fonctions de transition peuvent être vues comme :

$$\gamma^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P,\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}G, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\gamma^{P,M}(\boldsymbol{x})$$

et le groupe structural est $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$, agissant sur lui-même.

L'action à droite de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P$ est $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}R$, où R est l'action canonique à droite de G sur P. □

Extension des fibrés associés

Proposition 12.1.5. *Le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}(P \times_G F)$ sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est égal au fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P \times_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$, associé à $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P$, de groupe structural $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ agissant à gauche sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ par $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mu$.*

Démonstration. Nous avons déjà vu au théorème 12.1.4 que $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$-principal d'action de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P$ à droite donnée par $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}R$ où R désigne l'action à droite de G sur P.

L'atlas de fibré de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(P \times_G F) \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est :
- le recouvrement ouvert $(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U_i)_{i\in I}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$
- les cartes de fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha_i : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\pi^{-1}(U_i)) = (\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi)^{-1}(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}U_i) \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(V_i \times F) = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V_i \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$.

Les changements de cartes sont donc les applications

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha_i \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha_j^{-1} = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\alpha_i \circ \alpha_j^{-1}) = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha_{ij} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V_{ij} \times F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V_{ij} \times F$$

déterminées par $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha_{ij} = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\mu \circ (\gamma_{ij}, \mathrm{id}_F)) = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mu \circ (\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\gamma_{ij}, \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F})$.

Les fonctions de transition sont alors clairement les applications

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\gamma_{ij} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}V_{ij} \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$$

et l'action de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$ sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ est $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mu$. □

12.2 Fibrés verticaux

12.2.1 Extension des fibrés

Le fibré $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$ possède une section naturelle : la section nulle $\sigma_M^{\mathbb{A}}$. On notera $0_x^{\mathbb{A}} := \sigma_M^{\mathbb{A}}(x)$ le point de base ou $\mathbb{A}$-*vecteur nul* de $\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M$. On notera également $0_M^{\mathbb{A}}$ le sous-ensemble $\sigma_M^{\mathbb{A}}(M)$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Par conséquent, il existe une sous-variété canonique de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Ceci détermine un sous-fibré canonique de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi$: le fibré restreint à $0_M^{\mathbb{A}}$, dont les éléments se projettent sur les $\mathbb{A}$-vecteurs nuls.

Définition 12.2.1. *On définit le* fibré $\mathbb{A}$-vertical $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ *du fibré* $\pi : E \to M$ *par :*

$$\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E := \left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi\right)^{-1}\left(0_M^{\mathbb{A}}\right).$$

Les éléments du fibré $\mathbb{A}$-vertical sont appelés $\mathbb{A}$-vecteurs verticaux.

Notez que ce fibré existe toujours et est déterminé de manière entièrement canonique.

La proposition suivante décrit les structures fibrées de $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ sur E et M.

Proposition 12.2.2. $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ *est un sous-fibré de* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$*. Plus précisément,*

1. $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E \to M$ *est un fibré de fibre type* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ *et de groupe structural* G.
2. $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E \to E$ *est un fibré polynomial avec section, de fibre type le module* $W_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}$*, où* W *est le modèle de la fibre type* F *de* $E \to M$*, et de groupe structural le groupe structural* $\mathrm{GP}^k\left(W_{\underset{\mathbb{A}}{\circ}}\right)_0$ *du fibré* $\pi_F^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to F$.

Démonstration. 1. Les changements de cartes de fibré sont donnés par restriction de ceux du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to E$:

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha : U \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F \to U \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F,$$
$$(x, \boldsymbol{y}) \mapsto \left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\phi(x, \mathbf{0}), \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\beta((x, \mathbf{0}), \boldsymbol{y})\right) = \left(\phi(x), \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\gamma(x))\boldsymbol{y}\right).$$

Par conséquent, les fonctions de transition du fibré $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E \to M$ sont

$$\gamma^{\mathcal{V}^{A}E,M} : U \to G, \quad x \mapsto \gamma^{E,M}(x),$$

où l'action de G sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ est définie par :

$$G \to \mathrm{Diff}_{\mathbb{A}}\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F\right), \quad g \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}(\rho(g))$$

qui est bien définie même si G n'est pas un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ puisque $\rho(g)$ est un élément de $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$.

2. Les changements de cartes de fibré sont les mêmes que ci-dessus, et les fonctions de transition sont

$$\gamma^{\mathcal{V}^A E,E} : U \times F \to \mathrm{GP}^k\left(W_{\mathring{\mathbb{A}}}\right)_0, \quad (x,y) \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_y\left(\gamma^{E,M}(x)\right).$$

□

Le fibré $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ est constitué des $\mathbb{A}$-vecteurs tangents aux fibres sur E, c'est-à-dire :

$$\forall z \in E,\ \left(\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E\right)_z = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_z E_x$$

où $x = \pi(z)$. Dans toute la suite, on notera $x := \pi(z)$.

Champs verticaux

Parmi les champs de $\mathbb{A}$-vecteurs, nous pouvons distinguer ceux dont les $\mathbb{A}$-vecteurs sont tous verticaux.

Définition 12.2.3. *On appelle* champ de $\mathbb{A}$-vecteurs vertical *un champ de $\mathbb{A}$-vecteurs Z sur E tel que pour tout z dans E, $Z(z)$ appartient à $\left(\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E\right)_z = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_z E_x$. On note $\mathfrak{X}^{\mathcal{V}}_{\mathbb{A}}(E) \subset \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)$ l'ensemble des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs verticaux.*

Remarque 12.2.4. Les champs de $\mathbb{A}$-vecteurs verticaux sont les champs de $\mathbb{A}$-vecteurs π-reliés au champ nul $\sigma^{\mathbb{A}}_M$ de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$.

Lemme 12.2.5. *Un champ de $\mathbb{A}$-vecteurs $Z : E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ est vertical si et seulement si son extension $Z^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ préserve les fibres sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.*

Démonstration. Soit Z un champ de $\mathbb{A}$-vecteurs vertical. Alors le couple $(Z, \sigma^{\mathbb{A}}_M)$ est un morphisme de fibré de $E \to M$ dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "Z"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[d, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi"] \\ M \arrow[r, "\sigma^{\mathbb{A}}_M"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \end{tikzcd}$$

Par conséquent, son extension $Z^{\mathbb{A}} = \mu^{\mathbb{A}}_E \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}Z$ est un endomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ qui préserve les fibres sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. En effet, $Z^{\mathbb{A}}$ est au-dessus de $\mu^{\mathbb{A}}_M \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\sigma^{\mathbb{A}}_M = \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[r, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}Z"'] \arrow[d, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi"'] \arrow[rr, bend left, "Z^{\mathbb{A}}"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E\right) \arrow[r, "\mu^{\mathbb{A}}_E"'] \arrow[d, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi\right)"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[d, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi"] \\ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \arrow[r, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\sigma^{\mathbb{A}}_M"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M}"'] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M\right) \arrow[r, "\mu^{\mathbb{A}}_M"] & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \end{tikzcd}$$

Réciproquement, si $Z^{\mathbb{A}}$ est au-dessus de $\mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M}$, alors $Z(z) = Z^{\mathbb{A}} \circ \sigma_E^{\mathbb{A}}(z) = Z^{\mathbb{A}}\left(0_z^{\mathbb{A}}\right)$ est à valeurs dans la fibre en $0_x^{\mathbb{A}}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Par conséquent, pour tout z dans E, $Z(z)$ appartient à $\left(\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E\right)_z$. □

Proposition 12.2.6. *$\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)$, et la suite de groupes suivante est exacte :*

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E) \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E) \twoheadrightarrow \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M).$$

Démonstration. Soit $Z \in \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)$. D'après le lemme précédent, l'extension $Z^{\mathbb{A}}$ de Z est un endomorphisme de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ qui préserve les fibres sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Soit Z^{-1} l'inverse de Z dans $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)$. Puisque $Z^{\mathbb{A}} \circ \left(Z^{-1}\right)^{\mathbb{A}} = \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E}$, $\left(Z^{-1}\right)^{\mathbb{A}}$ préserve également les fibres sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et est donc l'extension d'une section $Z^{-1} = \left(Z^{-1}\right)^{\mathbb{A}} \circ \sigma_E^{\mathbb{A}} \in \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)$, toujours d'après le lemme précédent. L'exactitude de la suite est triviale. □

Proposition 12.2.7. *Le sous-groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E) \subset \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)$ des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs verticaux de E est stable par crochet.*

Démonstration. Les champs de $\mathbb{A}$-vecteurs verticaux sont les champs de $\mathbb{A}$-vecteurs π-reliés au champ de $\mathbb{A}$-vecteurs nul sur M, d'après la remarque précédente. De plus, d'après la proposition 8.3.6, si deux éléments X et Y de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)$ sont π-reliés à $\sigma_M^{\mathbb{A}}$, alors $[X,Y]_{\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)}$ est π-relié à $[\sigma_M^{\mathbb{A}}, \sigma_M^{\mathbb{A}}] = \sigma_M^{\mathbb{A}}$, car le crochet est bi-polynomial sans terme constant. Ainsi, $[X,Y]_{\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)}$ est un champ de $\mathbb{A}$-vecteurs vertical. □

12.2.2 Extension des fibrés principaux

Théorème 12.2.8. *Le fibré $\mathbb{A}$-vertical $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P$ d'un fibré G-principal $p : P \to M$ possède les structures fibrées suivantes :*

1. *sur P : $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P \to P$ est trivial ; plus précisément, $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P \simeq P \times \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}}G$.*
2. *sur M : $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P \to M$ est un fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$-principal, isomorphe au fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P$ restreint à $0_M^{\mathbb{A}} \subset \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$.*

Démonstration.

1. L'isomorphisme de fibrés au-dessus de P est donné par

$$P \times \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}}G \to \mathcal{V}^{\mathbb{A}}P, \quad (z,U) \mapsto \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}}(L_z)\,U = \mathrm{T}_{(z,e)}^{\mathbb{A}}R\left(0_z^{\mathbb{A}}, U\right),$$

où L_z est l'application définie par

$$L_z : G \to P, \quad g \mapsto R(z,g) =: zg =: R_g(z).$$

$\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}}(L_z)U$ est vertical car L_z est un difféomorphisme de G sur $P_{p(z)}$ (G agit simplement transitivement sur les fibres) et par conséquent, $\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}}(L_z)\left(\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}}G\right) = \mathrm{T}_z^{\mathbb{A}}P_{p(z)} = \left(\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P\right)_z$. Comme dans le cas d'un fibré général, le groupe structural peut en fait être réduit à G.

2. Nous avons vu ci-dessus que le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}p : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}P \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est un fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$-principal d'action à droite $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}R : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}P \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}G \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$. Cette action est libre et transitive sur les fibres de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}p$. Or $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P = (\mathrm{T}^{\mathbb{A}}p)^{-1}(0_M^{\mathbb{A}})$ donc le fibré $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P \to M$ est isomorphe au

fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}p$ restreint à la section nulle $\sigma^{\mathbb{A}}(M)$ au-dessus de l'application $\sigma^{\mathbb{A}} : M \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, $x \mapsto 0^{\mathbb{A}}_x$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E}"] \arrow[d, "p\circ\pi^{\mathbb{A}}_P"', "\pi^{\mathbb{A}}_M\circ\mathrm{T}^{\mathbb{A}}p"] & \mathcal{V} = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}P_{|0^{\mathbb{A}}_M} \arrow[d, "\mathrm{T}^{\mathbb{A}}p_{|0^{\mathbb{A}}_M}"] \\
M \arrow[r, "\sigma^{\mathbb{A}}_M"] & 0^{\mathbb{A}}_M \subset \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M
\end{tikzcd}$$

L'action $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}R$ se restreint en une action libre à droite et transitive en les fibres, ce qui munit le fibré $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}P \to M$ d'une structure de fibré principal de groupe structural $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$.

□

Champs de $\mathbb{A}$-vecteurs fondamentaux

L'isomorphisme entre les fibres du fibré $p : P \to M$ et le groupe structural G détermine une classe particulière de champs de $\mathbb{A}$-vecteurs verticaux : les champs de $\mathbb{A}$-vecteurs fondamentaux.

Définition 12.2.9. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ d'élément neutre e. Soit P une variété lisse sur $\mathbb{K}$, sur laquelle G agit de manière fortement $\mathbb{K}$-lisse via une application $R : P \times G \to P, (z, g) \mapsto R(z, g) =: L_z(g)$. Alors tout élément U dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e G$ définit un champ de $\mathbb{A}$-vecteurs sur P, noté $\widehat{U}$ et appelé* champ de $\mathbb{A}$-vecteurs fondamental sur P associé à U*, défini de la manière suivante :*

$$\widehat{U}_z := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e(L_z)U.$$

L'élément U est appelé le générateur *du champ de $\mathbb{A}$-vecteurs fondamental $\widehat{U}$. On note $\mathfrak{X}^{\mathcal{F}}_{\mathbb{A}}(P)$ l'ensemble des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs fondamentaux de P.*

Un cas important est celui où P est l'espace total d'un fibré G-principal lisse sur $\mathbb{K}$.

Proposition 12.2.10. *Soit $p : P \to M$ un fibré G-principal. Alors l'application*

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e G \to \mathfrak{X}^{\mathcal{V}}_{\mathbb{A}}P, \quad U \mapsto \left(\widehat{U} : z \mapsto \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e L_z U\right)$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *elle est polynomiale sans terme constant, c'est-à-dire que si un élément U dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e G$ est tel que $\widehat{U}$ s'annule, alors $U = 0^{\mathbb{A}}_e$,*
2. *elle est compatible avec les crochets, c'est-à-dire que pour tous U et U' dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e G$,*

$$\widehat{[U, U']}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e G} = [\widehat{U}, \widehat{U}']_{\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}P},$$

3. *pour tout élément U dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_e G$, on a*

$$(R_g)_\star \widehat{U} = (\mathrm{Ad}^{\widehat{\mathbb{A}}(g^{-1})}U) \in \chi^{\mathcal{V}}_{\mathbb{A}}P,$$

où $(R_g)_\star \widehat{U} := \mathrm{T}^{\mathbb{A}}R_g \circ \widehat{U} \circ R_{g^{-1}}$.

Cette application est bien définie : le champ de $\mathbb{A}$-vecteurs ainsi défini est vertical car pour tout z dans P, l'application L_z est à valeurs dans $P_{p(z)}$ et donc $\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_z : G \to \mathrm{T}_z^{\mathbb{A}} P_{p(z)} = \mathcal{V}_z^{\mathbb{A}} P$.

Démonstration. 1. La polynomialité est clairement vérifiée. De plus, si $\widehat{U}$ s'annule, alors il existe $z \in P$ tel que $\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_z U = 0$. Or $L_z : G \to P_x$ est un difféomorphisme donc en particulier, $\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_z$ est bijectif et $U = 0$.

2. Notons $U^L \in \mathfrak{X}^L(G)$ le champ de $\mathbb{A}$-vecteurs invariant à gauche vérifiant $U^L(e) = U$, c'est-à-dire tel que pour tout g dans G, $U^L(g) = \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} l_g U$. Alors les champs U^L et $\widehat{U}$ sont L_z-liés pour tout $z \in P$. En effet, pour tout $z \in P$ et pour tout $g \in G$, on a :

$$\widehat{U} \circ L_z(g) = \widehat{U}(zg) = \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_{zg} U = \mathrm{T}_g^{\mathbb{A}} L_z \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} l_g U = \mathrm{T}_g^{\mathbb{A}} U^L(g).$$

Donc d'après la proposition 8.3.6, on a pour tout z dans P :

$$\begin{aligned}
\widehat{[U, U']}_{\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} G}(z) &= \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_z([U, U']_{\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} G}) \\
&= \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_z \left([U^L, U'^L]_{\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} G}(e) \right) \\
&= [U^L, U'^L]_{\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} G} \circ L_z(e) \\
&= [U^L, U'^L]_{\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} G}(z).
\end{aligned}$$

3. Soient U dans $\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} G$, z dans P et g dans G. Alors on a :

$$\begin{aligned}
((R_g)_\star \widehat{U})(zg) &:= \mathrm{T}_z^{\mathbb{A}} R_g(\widehat{U}(R_{g^{-1}}(zg))) \\
&= \mathrm{T}_z^{\mathbb{A}} R_g(\widehat{U}(z)) \\
&= \mathrm{T}_z^{\mathbb{A}} R_g \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_z U \\
&= \mathrm{T}_g^{\mathbb{A}} L_z \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} r_g U \\
&= \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_{zg} \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} c_{g^{-1}} U \\
&= \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_{zg} \mathrm{Ad}^{\mathbb{A}}(g^{-1}) U \\
&= \mathrm{Ad}^{\widehat{\mathbb{A}(g^{-1})}} U(zg).
\end{aligned}$$

□

D'après le théorème 12.2.8, il est possible d'étendre tout vecteur vertical $Z_z \in \mathcal{V}_z^{\mathbb{A}} P$ en un champ de vecteurs fondamental Z défini de la manière suivante :

$$Z := \mathrm{ev}_z^{\widehat{-1}(Z_z)},$$

où l'application ev_z est définie pour tout z dans P de la manière suivante :

$$\mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} L_z = \mathrm{ev}_z : \mathrm{T}_e^{\mathbb{A}} G \to \mathcal{V}_z^{\mathbb{A}} P = \mathrm{T}_z^{\mathbb{A}} P_{p(z)}, \quad U \mapsto \widehat{U}_z.$$

12.2.3 Extension des fibrés associés

Soit $p : P \to M$ un fibré G-principal lisse sur $\mathbb{K}$. Soit $\pi : E = P \times_G F \to M$ un fibré fortement lisse sur $\mathbb{K}$, associé à P, d'action à gauche $\mu : G \times F \to F$. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{K} \oplus \mathring{\mathbb{A}}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil.

Fibrés verticaux des fibrés associés

Proposition 12.2.11. *L'espace vertical $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ d'un fibré $E = P \times_G F$ associé à un fibré G-principal P est égal à $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E = P \times_G \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$, où l'action à gauche d'un élément g de G sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ est $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\rho(g)$.*

Démonstration. Nous avons vu au théorème 12.1.5 que le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}(P \times_G F)$ sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est isomorphe au fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}P \times_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ de type $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\rho\right)$. Dans une carte de fibré, un vecteur $Z_z \in \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_z P$ est de la forme $\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_z p(Z_z), Y_y\right) \in \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U_i \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$. Ainsi, un vecteur vertical Z_z dans $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}_z P$ est de la forme $\left(0^{\mathbb{A}}_{p(z)}, Y_y\right) \in \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U_i \times \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$. Son image par un changement de cartes est de la forme

$$\begin{aligned}
\left(0^{\mathbb{A}}_x, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{(\gamma_{ij}(x),y)}\mu\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}_x\gamma_{ij}\left(0^{\mathbb{A}}_x\right), Y_y\right)\right) &= \left(0^{\mathbb{A}}_x, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{(\gamma_{ij}(x),y)}\mu\left(0^{\mathbb{A}}_{\gamma_{ij}(x)}, Y_y\right)\right) \\
&= \left(0^{\mathbb{A}}_x, \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_y(\rho(\gamma_{ij}(x)))Y_y\right),
\end{aligned}$$

où nous avons noté $x := p(z)$. □

12.3 Connexions de type Ehresmann

12.3.1 Définitions

Rappelons que $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ possède les structures fibrées suivantes :

1. *sur* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$: une structure de fibré lisse sur $\mathbb{A}$, ce qui munit chacune de ses fibres d'une structure de variété lisse sur $\mathbb{A}$, de fibre type $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}F$ et, si G est un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$, de groupe structural $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}G$,
2. *sur* E : une structure de fibré polynomial $\mathbb{A}$-lisse sans terme constant,
3. *sur* M : une structure de fibré décrite dans la section 12.1.2.

Le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ est du même type que le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ au sens où il possède les mêmes structures fibrées.

Définition 12.3.1. *Une* $\mathbb{A}$-connexion*, ou* $\mathbb{A}$-décomposition *sur le fibré $E \to M$ est un $\mathbb{K}$-difféomorphisme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[rr, "C^{\mathbb{A}}"] \arrow[dr] & & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E \arrow[dl] \\
& \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E &
\end{tikzcd}$$

qui respecte les structures fibrées sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ et sur E (et donc sur M), au sens où

1. sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *: $C^{\mathbb{A}}$ est $\mathbb{A}$-lisse fibre à fibre,*
2. sur E *: $C^{\mathbb{A}}$ est un morphisme de fibrés polynomiaux sans terme constant.*

On dit qu'une $\mathbb{A}$-connexion sur le fibré $E \to M$ est une *connexion de type Ehresmann* sur le fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to M$.

Proposition 12.3.2. *Demander que $C^{\mathbb{A}}$ soit sans terme constant au-dessus de E est équivalent à demander que la restriction de $C^{\mathbb{A}}$ à $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ soit l'identité $\left(C^{\mathbb{A}}_{|\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E} = 0 \times_{\mathrm{id}_M} \mathrm{id}_{\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E}\right)$.*

Démonstration. Soit x un point de M. Considérons la fibre $\left(\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E\right)_{0_x^{\mathbb{A}}} \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E_x$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ en $0_x^{\mathbb{A}} \in \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. Alors la restriction de $C^{\mathbb{A}}$ à cette fibre est une application lisse sur $\mathbb{A}$, de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E_x$ dans $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E_x$, au-dessus de id_{E_x}. Ainsi, d'après le théorème 8.2.2, cette restriction est l'extension de la section

$$E_x \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E_x, \quad z \mapsto C^{\mathbb{A}}_{|\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E_x} \circ \sigma^{\mathbb{A}}_{E_x}(z) = C^{\mathbb{A}} \circ \sigma^{\mathbb{A}}_{E}(z).$$

Or l'extension de $z \mapsto C^{\mathbb{A}} \circ \sigma^{\mathbb{A}}_{E}(z)$ est l'identité sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E_x$ si et seulement si cette section est la section nulle, si et seulement si $C^{\mathbb{A}}$ est un morphisme de fibrés avec sections sur E, c'est-à-dire sans terme constant car les fibrés sont polynomiaux sur E. □

Définition 12.3.3. *Un* $\mathbb{A}$-connecteur *sur le fibré* $\pi : E \to M$ *est un morphisme surjectif* $\mathcal{K}^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \twoheadrightarrow \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ *qui préserve les structures fibrées sur* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *et sur* E *:*

1. $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ *est un épimorphisme de fibrés sur* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to 0_M^{\mathbb{A}}$ *tel que la restriction à chaque fibre soit* $\mathbb{A}$*-lisse,*
2. $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ *est un épimorphisme de fibrés polynomiaux sans terme constant, au-dessus de* E*.*

Proposition 12.3.4. *Soit* $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ *un* $\mathbb{A}$*-connecteur sur le fibré* $\pi : E \to M$*. Alors* $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ *vérifie la relation suivante :* $\mathcal{K}^{\mathbb{A}} \circ \mathcal{K}^{\mathbb{A}} = \mathcal{K}^{\mathbb{A}}$*.*

Démonstration. De manière analogue aux décompositions, il est équivalent de demander que :
– le $\mathbb{A}$-connecteur $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ soit sans terme constant,
– la restriction de $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ à $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ soit l'identité.
La deuxième condition implique clairement la relation $\mathcal{K}^{\mathbb{A}} \circ \mathcal{K}^{\mathbb{A}} = \mathcal{K}^{\mathbb{A}}$. □

$\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ est un isomorphisme pour chaque fibre sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, c'est à dire que

$$\forall X_x \in \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \quad \mathcal{K}^{\mathbb{A}}_{|X_x} : (\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E)_{X_x} \simeq (\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E)_{0_x^{\mathbb{A}}} \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{A}}F.$$

Remarque 12.3.5. Pour tout fibré $E \to M$ les données suivantes sont équivalentes :

1. un $\mathbb{A}$-connecteur $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$,
2. une $\mathbb{A}$-décomposition $C^{\mathbb{A}}$.

En effet, tout $\mathbb{A}$-connecteur $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ induit une $\mathbb{A}$-décomposition $\mathrm{id}_{T^{\mathbb{A}}M} \times_{\mathrm{id}_M} \mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ et toute $\mathbb{A}$-décomposition $C^{\mathbb{A}}$ induit un $\mathbb{A}$-connecteur $\mathrm{pr}_{\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E} \circ C^{\mathbb{A}}$.

Toute $\mathbb{A}$-connexion induit un morphisme de groupes

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E) \to \mathfrak{X}^{\mathcal{V}}_{\mathbb{A}}(E), \quad X \mapsto X^{\mathcal{V}} := \mathcal{K}^{\mathbb{A}} \circ X.$$

12.3.2 Fibrés horizontaux

Nous venons de décrire un sous-fibré canonique du fibré $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ et de définir une notion permettant à tout élément d'un fibré d'associer un élément du sous-fibré vertical. Ceci nous mène à la définition de sous-fibré horizontal qui permet de décomposer un élément du fibré $\mathbb{A}$-tangent de E en ses parties horizontale et verticale et ce, de manière unique. Nous pourrons également définir le relèvement des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs en des champs $\mathbb{A}$-horizontaux. Commençons par définir le fibré horizontal et donner ses structures fibrées.

Définition 12.3.6. *Un fibré* $\mathbb{A}$-horizontal *du fibré* $E \to M$ *est un sous-fibré* $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E$ *de* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$, $\mathbb{A}$-supplémentaire *au fibré* $\mathbb{A}$*-vertical dans le sens où il existe un* $\mathbb{K}$*-difféomorphisme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{H}^{\mathbb{A}}E \times_E \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E \arrow[dl] \\ & \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E & \end{tikzcd}$$

qui respecte les structures fibrées sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *et sur* E *(et donc sur* M*), au sens où il est* $\mathbb{A}$*-lisse fibre à fibre sur* $T^{\mathbb{A}}M$ *et polynomial sans terme constant sur* E*.*

Il faut noter que, contrairement au fibré $\mathbb{A}$-vertical, un fibré $\mathbb{A}$-horizontal n'existe pas toujours. De plus, s'il existe, il n'est pas nécessairement unique.

La proposition suivante décrit les structures fibrées d'un fibré $\mathbb{A}$-horizontal.

Proposition 12.3.7. *Soit* $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E$ *un fibré* $\mathbb{A}$*-horizontal sur* E*. Alors* $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E$ *possède les structures fibrées suivantes :*

1. sur M. $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E$ *est isomorphe au produit fibré de* $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ *et* E *sur* M *:*

$$\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E \simeq \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E.$$

2. sur E. $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E$ *est un fibré polynomial avec section, isomorphe au fibré* $\pi_M^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \to M$*, au sens où il existe un isomorphisme fibre à fibre.*

Démonstration. 1. L'isomorphisme est donné par :

$$Z_z \in \mathcal{H}_z^{\mathbb{A}}E \mapsto \left(\mathrm{T}_z^{\mathbb{A}}\pi(Z_z), z\right) \in \mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M \times E_x$$

2. En effet, les changements de cartes de fibré sont les applications

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\alpha : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \times F \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}U \times F, (\boldsymbol{x}, y) \mapsto \left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\phi(\boldsymbol{x}), \gamma(x, y))\right).$$

Ainsi, les fonctions de transition sont :

$$\gamma^{\mathcal{H}^A E, E} : U \times F \to \mathrm{GP}^k\left(V\right)_0, \quad (x, y) \mapsto \mathrm{Tay}_x^k \phi.$$

□

Remarque 12.3.8. Toute $\mathbb{A}$-connexion sur E induit un fibré $\mathbb{A}$-horizontal sur E. En effet, si $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$ est une $\mathbb{A}$-décomposition, alors nous pouvons définir un fibré $\mathbb{A}$-horizontal $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E$ de la manière suivante : $\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E := \left(C^{\mathbb{A}}\right)^{-1}\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M 0_E^{\mathbb{A}}\right)$.

L'inverse $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E \to \mathcal{H}^{\mathbb{A}}E$ de l'isomorphisme donné au premier point de la proposition est appelé *relèvement* $\mathbb{A}$*-horizontal*. À tout $\mathbb{A}$-vecteur en un point x de M, il associe un $\mathbb{A}$-vecteur horizontal en chaque point de la fibre E_x, c'est-à-dire un champ de $\mathbb{A}$-vecteurs sur E_x. Le relèvement $\mathbb{A}$-horizontal en un point z de E_x noté $\widetilde{X}_z$ d'un $\mathbb{A}$-vecteur X_x de $\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M$ est l'unique $\mathbb{A}$-vecteur horizontal de $\mathrm{T}_z^{\mathbb{A}}E$ qui lui soit $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi$-relié. Finalement, tout $\mathbb{A}$-vecteur se décompose de manière unique en un vecteur $\mathbb{A}$-vertical et un vecteur $\mathbb{A}$-horizontal.

12.3.3 Champs horizontaux

Définition 12.3.9. *On appelle* champ de $\mathbb{A}$-vecteurs horizontal *un champ de $\mathbb{A}$-vecteurs Z sur E tel que pour tout z dans E, $Z(z)$ appartienne à $(\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E)_z$. On note $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{H}}(E) \subset \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)$ l'ensemble des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs horizontaux.*

Contrairement au cas des champs verticaux, l'extension $Z^{\mathbb{A}}$ d'un champ horizontal Z n'est pas un morphisme de fibrés sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$, et les champs horizontaux ne sont pas stables par crochet en général.

Le relèvement $\mathbb{A}$-horizontal noté $\widetilde{X}$ dans $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{H}}(E)$ d'un champ de vecteurs X dans $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$, est l'unique champ de $\mathbb{A}$-vecteurs horizontal de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)$ qui lui soit $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi$-relié.

Définition 12.3.10. *Un champ Z dans $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E)$ est dit champ $\mathbb{A}$-basique s'il est $\mathbb{A}$-horizontal et s'il est $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi$-relié à un champ de vecteurs X dans $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$. L'ensemble des champs $\mathbb{A}$-basiques sur E est noté $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathrm{bas}}(E)$.*

Un champ horizontal est donc basique si et seulement s'il est constant le long des fibres. Finalement, $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\pi$ est un isomorphisme entre $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathrm{bas}}(E)$ et $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M)$, d'inverse

$$X \in \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(M) \mapsto \Big(z \mapsto (X(\pi(z)), z) \in \mathrm{T}^{\mathbb{A}}_{\pi(z)}M \times \{z\} \simeq (\mathcal{H}^{\mathbb{A}}E)_z\Big).$$

12.3.4 Structure d'espace homogène principal de l'ensemble des connexions

Théorème 12.3.11. *Soient $\pi : E \to M$ un fibré lisse sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil de hauteur k. Alors l'ensemble des $\mathbb{A}$-connexions est un espace homogène principal modelé sur le groupe*

$$\mathrm{Pol}^k\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)\right)_0$$

des applications polynomiales fibre à fibre sur M, de degré k et sans terme constant, de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ dans le groupe $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)$ des champs de $\mathbb{A}$-vecteurs verticaux de E.

Rappelons que le point 3 du théorème 8.2.2 montre que la fibre de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)$ en chaque point x de M, à savoir $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E_x)$, possède une structure polynomiale, ce qui prouve que le groupe $\mathrm{Pol}^k\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)\right)_0$ est bien défini. Rappelons également que la structure de groupe est définie point par point à l'aide de celle de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)$.

Démonstration. Soient C et C' deux $\mathbb{A}$-décompositions sur le fibré $E \to M$. On pose

$$B := C' \circ C^{-1} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M \mathcal{V}^{\mathbb{A}}E.$$

C'est un automorphisme de fibrés au-dessus de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M \times_M E$.

Considérons la fibre de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}E$ au point X_x de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$. La restriction de B à cette fibre est une application $\mathbb{A}$-lisse sur $\left(\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E\right)_x = \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E_x$ au-dessus de l'identité de E_x, c'est-à-dire est l'extension d'un champ Z de $\mathbb{A}$-vecteurs vertical défini par :

$$Z : E_x \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E_x, \quad z \mapsto B\left(X_x, 0_z^{\mathbb{A}}\right).$$

De plus, la dépendance en $X_x \in \mathrm{T}^{\mathbb{A}}M$ est polynomiale car B est polynomiale de degré k sans terme constant au-dessus de E donc l'application

$$\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}}M \to \mathrm{T}_z^{\mathbb{A}}E_x, \quad X_x \mapsto B\left(X_x, 0_z^{\mathbb{A}}\right)$$

est polynomiale de degré k sans terme constant.

Finalement, pour tout x dans M, nous avons une application polynomiale de degré k sans terme constant

$$\mathrm{T}_x^{\mathbb{A}} M \simeq \underset{\mathbb{A}}{V_{\circ}} \to \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(E_x) \simeq \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)$$

et donc l'espace homogène principal est modelé sur le groupe $\mathrm{Pol}\left(\mathrm{T}^{\mathbb{A}} M, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)\right)_0$ des applications polynomiales sans terme constant fibre à fibre sur M. La structure de groupe est bien celle définie par la structure de groupe de $\mathfrak{X}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{V}}(E)$. Notez que ce groupe est isomorphe (de manière non canonique) au groupe $\mathrm{Pol}\left(\underset{\mathbb{A}}{V_{\circ}}, \mathfrak{X}_{\mathbb{A}}(F)\right)_0$ qui est l'un des trois groupes générateurs du groupe $G^{\mathrm{T}^{\mathbb{A}} E, M}$ décrit au théorème 12.1.2. □

12.4 Itération des connexions de type Ehresmann

Le but de cette section est de déterminer une manière d'itérer les connexions, ce qui nous permettra de définir la courbure d'une connexion. Commençons par définir cette notion à l'aide de deux connexions, que nous considérerons identiques par la suite.

Théorème 12.4.1. *Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux $\mathbb{K}$-algèbres de Weil. Soit $\pi : E \to M$ un fibré lisse sur $\mathbb{K}$. Soient une $\mathbb{A}$-connexion sur E déterminée par le $\mathbb{A}$-connecteur $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$, et une $\mathbb{B}$-connexion sur E déterminée par le $\mathbb{B}$-connecteur $\mathcal{K}^{\mathbb{B}}$. Alors nous pouvons construire de manière naturelle deux $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})$-connexions sur E.*

Démonstration. Considérons l'application $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$-lisse

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}} \mathcal{K}^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}} E \to \mathrm{T}^{\mathbb{B}} \mathcal{V}^{\mathbb{A}} E.$$

Elle est au-dessus de $\mathcal{K}^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}} E \to \mathcal{V}^{\mathbb{A}} E$ et au-dessus de $\mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{B}} E}$. Sa restriction à $\mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathcal{K}^{\mathbb{B}} E$ est à valeurs dans $\mathcal{V}^{\mathbb{B}} \mathcal{V}^{\mathbb{A}} E = \mathcal{V}^{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}} E$. De même, l'application

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathcal{K}^{\mathbb{B}} : \mathrm{T}^{\mathbb{B} \otimes \mathbb{A}} E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathcal{V}^{\mathbb{B}} E$$

est lisse sur $\mathbb{B} \otimes \mathbb{A}$. Ainsi, $\tau^{\mathbb{B}, \mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathcal{K}^{\mathbb{B}} \circ \tau^{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$ est lisse sur $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$, où $\tau^{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$ est le flip de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, et est au-dessus de $\mathcal{K}^{\mathbb{B}} : \mathrm{T}^{\mathbb{B}} E \to \mathcal{V}^{\mathbb{B}} E$ et au-dessus de $\mathrm{id}_{\mathrm{T}^{\mathbb{A}} E}$. De plus, sa restriction à $\mathrm{T}^{\mathbb{B}} \mathcal{V}^{\mathbb{A}} E$ est à valeurs dans $\mathcal{V}^{\mathbb{B}} \mathcal{V}^{\mathbb{A}} E = \mathcal{V}^{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}} E$. On obtient ainsi deux $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})$-connecteurs sur E :

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}} \mathcal{K}^{\mathbb{A}} \circ \tau^{\mathbb{B}, \mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathcal{K}^{\mathbb{B}} \circ \tau^{\mathbb{A}, \mathbb{B}} \quad \text{et} \quad \tau^{\mathbb{B}, \mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathcal{K}^{\mathbb{B}} \circ \tau^{\mathbb{A}, \mathbb{B}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{B}} \mathcal{K}^{\mathbb{A}}.$$

□

Notez que leurs conjugués par $\tau^{\mathbb{B}, \mathbb{A}}$ sont exactement les deux $\mathbb{B} \otimes \mathbb{A}$-connecteurs obtenus par itération sur E. Ces connecteurs sont tous deux au-dessus de $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ et de $\mathcal{K}^{\mathbb{B}}$.

Il n'existe pas de choix naturel de connexion itérée, mais nous pouvons faire un choix arbitraire dans la procédure d'itération et considérer la connexion $C^{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}}$ correspondant au connecteur

$$\mathrm{T}^{\mathbb{B}} \mathcal{K}^{\mathbb{A}} \circ \tau^{\mathbb{B}, \mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}} \mathcal{K}^{\mathbb{B}} \circ \tau^{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$$

comme étant *la* $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})$-connexion itérée (relativement à ce choix).

Corollaire 12.4.2. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Soit $\pi : E \to M$ un fibré lisse sur $\mathbb{K}$ muni d'une $\mathbb{A}$-connexion sur E. Alors nous pouvons construire de manière naturelle deux $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-connexions sur E. De plus, ces connexions sont conjuguées par le flip de $\mathbb{A}$.*

Démonstration. Soit $C^{\mathbb{A}}$ une $\mathbb{A}$-connexion de connecteur $\mathcal{K}^{\mathbb{A}}$ sur un fibré $\pi : E \to M$. Alors, d'après le théorème précédent, dans le cas $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ et $\mathcal{K}^{\mathbb{A}} = \mathcal{K}^{\mathbb{B}}$, nous pouvons construire de manière naturelle deux connecteurs sur $\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}E$, à savoir

$$\mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathcal{K}^{\mathbb{A}} \circ \tau^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathcal{K}^{\mathbb{A}} \circ \tau^{\mathbb{A}} \ \text{ et } \ \tau^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathcal{K}^{\mathbb{A}} \circ \tau^{\mathbb{A}} \circ \mathrm{T}^{\mathbb{A}}\mathcal{K}^{\mathbb{A}}.$$

Ces deux connecteurs sont clairement conjugués par le flip $\tau^{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}$. Ils induisent deux $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{A})$-connexions : $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$ et $\tau^{\mathbb{A}} \circ C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}} \circ \tau^{\mathbb{A}}$. □

Théorème 12.4.3. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. Soit $\pi : E \to M$ un fibré lisse sur $\mathbb{K}$ muni d'une $\mathbb{A}$-connexion $C^{\mathbb{A}}$ sur E. Alors nous pouvons construire de manière naturelle une $(\mathbb{A} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A})$-connexion sur E.*

Démonstration. À partir de la $\mathbb{A}$-connexion $C^{\mathbb{A}}$ sur E, nous pouvons construire la connexion itérée $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$. Nous appliquons ensuite le théorème précédent à la $\mathbb{A}$-connexion $C^{\mathbb{A}}$ et à la $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-connexion $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$, avec $\mathbb{B} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{A}$, et ainsi de suite. □

Notez qu'à nouveau, la construction de $C^{\mathbb{A}\otimes\ldots\otimes\mathbb{A}}$ résulte d'un choix dans l'ordre de la procédure.

En particulier, avec $\mathbb{A} = \mathrm{T}\mathbb{K}$, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 12.4.4. *Soit $\pi : E \to M$ un fibré lisse sur $\mathbb{K}$. Soit $C^{\mathrm{T}\mathbb{K}}$ une connexion de type Ehresmann sur le fibré $\mathrm{T}E \to M$. Alors nous pouvons construire explicitement une connexion de type Ehresmann su le fibré $\mathrm{T}^k E \to M$, pour tout entier naturel k.*

12.5 Opérateurs de courbure

Soient $\pi : E \to M$ un fibré lisse sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil. On considère un automorphisme Ψ de $\mathbb{A}$. Alors l'application induite Ψ_E préserve le fibré vertical $\mathcal{V}^{\mathbb{A}}E$. Par conséquent, nous pouvons mesurer le comportement d'une $\mathbb{A}$-connexion relativement à Ψ de la manière suivante.

Définition 12.5.1. *La* Ψ-courbure R^{Ψ} *d'une $\mathbb{A}$-connexion $C^{\mathbb{A}}$ sur un fibré $\pi : E \to M$ est définie de la manière suivante :*

$$R^{\Psi} := \left(C^{\mathbb{A}}\right)^{-1} \circ \left(\Psi_M^{-1} \times_{\mathrm{id}_M} \Psi_E^{-1}\right) \circ C^{\mathbb{A}} \circ \Psi_E : \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}}E.$$

Une connexion est dite Ψ-symétrique *si sa Ψ-courbure est nulle.*

Les opérateurs de courbure sont donc définis comme étant les obstructions à certaines symétries d'une connexion.

Soit $C^{\mathbb{A}}$ une $\mathbb{A}$-connexion sur un fibré $\pi : E \to M$. Alors, d'après la section précédente, $C^{\mathbb{A}}$ induit une $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-connexion $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$ sur E.

Définition 12.5.2. *Soit $C^{\mathbb{A}}$ une $\mathbb{A}$-connexion sur un fibré $\pi : E \to M$. Alors la* courbure R *de $C^{\mathbb{A}}$ est définie comme étant le commutateur de la $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-connexion $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$ itérée sur E et du flip $\tau_E^{\mathbb{A}}$ de $\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}E$, c'est-à-dire :*

$$R := \left(C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}\right)^{-1} \circ \tau_E^{\mathbb{A}} \circ C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}} \circ \tau_E^{\mathbb{A}} : \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}E \to \mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}E.$$

La courbure de la $\mathbb{A}$-connexion représente la différence entre les deux connexions itérées possibles : $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$ et $\tau^{\mathbb{A}} \circ C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}} \circ \tau^{\mathbb{A}}$. En d'autres termes, il s'agit de la τ-courbure de la connexion itérée $C^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}$. Cette application est la différence de deux $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})$-connexions, dont l'ensemble est un espace homogène principal modelé sur le groupe

$$\mathrm{Pol}^k(\mathrm{T}^{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}M, \mathfrak{X}^{\mathcal{V}}_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}}(E))_0$$

d'après le théorème 12.3.11.

Plus généralement, le groupe symétrique Σ_k agit sur les connexions itérées de la section précédente, et nous pouvons définir les *courbures d'ordre supérieur* comme étant les obstructions aux symétries par rapport au groupe des permutations, c'est-à-dire, pour toute permutation σ dans Σ_k, la courbure d'ordre supérieur associée à σ est la σ-courbure de la connexion itérée $C^{\mathbb{A}\otimes\cdots\otimes\mathbb{A}}$.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de cette partie, une telle analyse de l'action du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ sur les connexions peut être motivée par le modèle de la théorie de Galois. Ainsi, le présent travail peut être vu comme le premier pas vers une « théorie de Galois des connexions » qui, elle, reste à être développée.

Annexe A

Applications polynomiales

Le but de cette annexe est de montrer que les applications $\mathbb{K}$-polynomiales continues sont lisses sur $\mathbb{K}$, et que leurs extensions scalaires par des $\mathbb{K}$-algèbres de Weil $\mathbb{A}$ sont également continues, et donc lisses sur $\mathbb{A}$. Nous donnons également une condition d'inversibilité pour la composition tronquée à un certain degré : une application $\mathbb{K}$-polynomiale $P : V \to V$ sur un $\mathbb{K}$-module V est inversible si et seulement si sa partie linéaire est inversible. Nous étudions ensuite en détail la structure des extensions scalaires par des algèbres de Weil.

A.1 Applications (multi)-homogènes continues

Nous allons montrer que la continuité des applications polynomiales est équivalente à celle de leurs parties (multi-)homogènes.

Théorème A.1.1 (Séparation des parties homogènes)**.** *Soient V et W des modules topologiques sur un anneau topologique $\mathbb{K}$.*

1. *Soit $P = \sum_{i=0}^{k} P_i$ une somme d'applications $\mathbb{K}$-homogènes $P_i : V \to W$ de degré i, c'est-à-dire que pour tout r dans $\mathbb{K}$, $P_i(rx) = r^i P_i(x)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *L'application $P : V \to W$ est continue.*
   (b) *Pour tout entier $0 \leq i \leq k$, la partie homogène $P_i : V \to W$ est continue.*
2. *Soit $P = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n} P_{\boldsymbol{\alpha}} : V^n \to W$ une somme finie d'applications* multi-homogènes *$P_{\boldsymbol{\alpha}} : V^n \to W$, avec $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, c'est-à-dire que pour tout r dans $\mathbb{K}$ et pour tout entier $1 \leq i \leq n$,*
   $$P_{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, \ldots, rx_i, \ldots, x_n) = r^{\alpha_i} P_{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, \ldots, x_n).$$
   Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) *L'application $P : V^n \to W$ est continue.*
   (b) *Pour tout $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\mathbb{N}^n$, la partie multi-homogène $P_{\boldsymbol{\alpha}} : V^n \to W$ est continue.*

Démonstration. 1. Prouvons la première équivalence. Il suffit de montrer le sens direct car la réciproque est triviale. Supposons que P soit continue. Comme la partie homogène P_0 est constante, alors elle est continue. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$P_0 = 0$. Fixons les scalaires $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{K}$ et définissons, pour tout entier $1 \leq i \leq k-1$, les applications continues (dépendant de ces scalaires)

$$Q_1(x) := r_1 P(x) - P(r_1 x) = \sum_{i=2}^{k} (r_1 - r_1^i) P_i(x),$$

$$Q_{i+1}(x) := (r_{i+1})^{i+1} Q_i(x) - Q_i(r_{i+1} x).$$

Alors l'application Q_i est une combinaison linéaire des applications $P_{i+1}, \ldots, P_k$, et en particulier, nous trouvons que

$$Q_{k-1}(x) = \lambda P_k(x) \quad \text{avec} \quad \lambda = (r_1 - r_1^k)(r_2^2 - r_2^k) \cdots (r_{k-1}^{k-1} - r_{k-1}^k).$$

Afin de prouver que l'application P_k est continue, il suffit de montrer que nous pouvons choisir des scalaires $r_1, \ldots, r_{k-1} \in \mathbb{K}$ tels que le scalaire λ soit inversible, car nous aurons alors $P_k(x) = \lambda^{-1} Q_{k-1}(x)$. Puisque Q_{k-1} est continue par construction, la continuité de P_k sera démontrée.

Pour prouver notre assertion, écrivons $r_i^i - r_i^k = r_i^i(1 - r_i^m)$ avec $m = k - i$. Comme l'application $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $r \mapsto 1 - r^m$ est continue, et comme $\mathbb{K}^\times$ est un ouvert, alors $U := f^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ est un ouvert, et U est non vide puisque $0 \in U$. Comme $\mathbb{K}^\times$ est un ouvert dense, $U' := U \cap \mathbb{K}^\times$ est un ouvert non vide, et nous pouvons choisir r_i dans U'. En faisant de même pour tout entier $1 \leq i \leq k$, nous obtenons un scalaire inversible λ.

Ayant démontré que la partie homogène P_k est continue, nous remplaçons P par $P - P_k$ et nous montrons comme ci-dessus que l'application P_{k-1} est continue, et ainsi de suite pour toutes les applications homogènes.

2. La seconde équivalence est prouvée de manière similaire : nous procédons comme ci-dessus relativement à la première variable x_1 afin de séparer les termes selon leur degré en x_1, puis nous recommençons la procédure avec la seconde variable x_2, et ainsi de suite.

□

A.2 Applications polynomiales continues

Pour une comparaison récente de quelques notions d'applications polynomiales, voir l'article [Xantcha 2011], où sont données trois définitions différentes d'applications polynomiales, dont celle de l'article [Eilenberg, Mac Lane 1954] et celle de l'article [Roby 1963].

La définition générale suivante d'application $\mathbb{K}$-polynomiale, donnée au paragraphe 5 de la partie 4 du livre [Bourbaki 1971] a été utilisée dans l'article [Bertram, Glöckner, Neeb 2004] (voir définition A.5) et correspond à l'approche de Eilenberg et Mac Lane.

Définition A.2.1. *Une application $P : V \to W$ entre deux $\mathbb{K}$-modules V et W est dite* polynomiale homogène de degré k *si pour tout système de générateurs $(e_i)_{i \in I}$ de V il existe des coefficients a_α dans W (où $\alpha : I \to \mathbb{N}$ a un support fini et $|\alpha| := \sum_{i \in I} \alpha_i = k$) tels que*

$$P\left(\sum_{i \in I} t_i e_i\right) = \sum_{\alpha} t^\alpha a_\alpha \qquad \text{où } t^\alpha := \prod_{i \in I} t_i^{\alpha_i}.$$

Si V est un $\mathbb{K}$-module libre (en particulier, si $\mathbb{K}$ est un corps), alors ceci est équivalent à dire qu'il existe une application k-multilinéaire $m : V^k \to W$ telle que $P(x) = m(x, \ldots, x)$. Dans tous les cas, une application polynomiale *est une somme finie d'applications polynomiales homogènes.*

L'ensemble des applications $\mathbb{K}$-polynomiales $P : V \to W$ est noté $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}(V, W)$, et on note

$$\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}(V, W)_0 := \{P : V \to W \text{ polynomial} \mid P(0) = 0\}$$

le sous-ensemble des applications $\mathbb{K}$-polynomiales sans terme constant. Le sous-ensemble des applications $\mathbb{K}$-polynomiales de degré au plus k est noté $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}(V, W)$. Si $V = W$, alors on munit $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}(V, V)$ du produit suivant : la composition des polynômes, tronquée au degré k. L'ensemble des applications polynomiales $P : V \to V$ de degré au plus k admettant une application inverse polynomiale $Q : V \to V$ forme un groupe noté $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)$, et appelé groupe $\mathbb{K}$-polynomial général de degré k de V. *Le sous-groupe stabilisateur de 0 est noté $\mathrm{GP}_{\mathbb{K}}(V)_0$.*

Notez que si $P(x) = m(x, \ldots, x)$, où $m : V \times \ldots \times V \to V$ est une application multilinéaire, alors la continuité de P n'implique pas nécessairement la continuité de l'application m, sauf si les entiers sont inversibles dans $\mathbb{K}$, auquel cas, par polarisation, nous pouvons trouver une application continue symétrique m.

Le théorème suivant donne une caractérisation des applications inversibles dans le groupe polynomial d'un $\mathbb{K}$-module.

Théorème A.2.2. *Une application polynomiale $P : V \to V$ est inversible dans $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)$ si et seulement si sa partie linéaire P_1 est inversible.*

Démonstration. Le sens direct est clair : l'inverse de P_1 est la partie linéaire de l'inverse de P. Il suffit de prouver la réciproque. Décomposons P en somme de parties homogènes P_i de degré i et supposons que P_1 est inversible.

1. Montrons dans un premier temps que P possède un inverse à gauche.

   Posons
   $$Q_0 : V \to V, \quad v \mapsto v - P_0(v).$$
   Alors Q_0 est une application polynomiale et $Q_0 \circ P$ est une application polynomiale sans terme constant.

   Posons
   $$Q_1 := P_1^{-1} : V \to V.$$
   Alors $Q_1 \circ Q_0 \circ P$ est une application polynomiale sans terme constant dont la partie linéaire est l'identité. Notons $\tilde{P}_{\geq 2}$ la somme des parties homogènes de degré supérieur ou égal à 2 de cette application.

   Posons
   $$Q_2 : V \to V, \quad v - \tilde{P}_{\geq 2}(v).$$
   Alors $Q_2 \circ Q_1 \circ Q_0 \circ P$ est une application polynomiale de la forme $\mathrm{id}_V + \tilde{P}_{\geq 3}$, où $\tilde{P}_{\geq 3}$ est une application polynomiale somme de parties homogènes de degré supérieur ou égal à 3.

En effet,

$$\begin{aligned} Q_2 \circ Q_1 \circ Q_0 \circ P(v) &= Q\left(v + \tilde{P}_{\geq 2}(v)\right) \\ &= v + \tilde{P}_{\geq 2}(v) - \tilde{P}_{\geq 2}\left(v + \tilde{P}_{\geq 2}(v)\right). \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer d'après la remarque de la fin de la preuve du théorème A.2.4 que $\tilde{P}_{\geq 2}$ est de la forme

$$\tilde{P}_{\geq 2}(v) = \sum_{i=2}^{k} m_i(v, \ldots, v),$$

où $m_i : V^i \to V$ est multilinéaire. Dans ce cas, $\tilde{P}_{\geq 2}\left(v + \tilde{P}_{\geq 2}(v)\right)$ est de la forme

$$\sum_{i=2}^{k} m_i \left(v + \sum_{j=2}^{k} m_j(v, \ldots, v), \ldots, v + \sum_{j=2}^{k} m_j(v, \ldots, v) \right).$$

qui est somme d'applications polynomiales homogènes de degré supérieur ou égal à 2 et dont le seul terme de degré 2 est $m_2(v, v)$ qui est précisément le terme de degré 2 de $\tilde{P}_{\geq 2}(v)$.

Finalement, les termes de degré 2 se compensent et $Q_2 \circ Q_1 \circ Q_0 \circ P(v)$ est bien de la forme $v + \tilde{P}_{\geq 3}(v)$, où $\tilde{P}_{\geq 3}$ est l'application polynomiale somme de parties polynomiales homogènes de degré supérieur ou égal à 3 définie par

$$\tilde{P}_{\geq 3}(v) := \sum_{i=2}^{k} m_i \left(v + \sum_{j=2}^{k} m_j(v, \ldots, v), \ldots, v + \sum_{j=2}^{k} m_j(v, \ldots, v) \right) - m_2(v, v).$$

On définit ensuite l'application polynomiale $Q_3 : V \to V, \quad v \mapsto v - \tilde{P}_{\geq 3}(v)$ et on montre comme précédemment que $Q_3 \circ Q_2 \circ Q_1 \circ Q_0 \circ P$ est une application polynomiale somme de la partie linéaire identité et de parties polynomiales homogènes de degré supérieur ou égal à 4.

On procède ensuite par récurrence. Notez que les étapes de construction de Q_0 et Q_1 sont particulières. L'initialisation commence avec Q_2 et nous effectuons ensuite la récurrence en définissant à chaque étape les applications $\tilde{P}_{\geq i}$ et $Q_i : V \to V, \ v \mapsto v - \tilde{P}_{\geq i}(v)$, puis on montre que $Q_i \circ \ldots \circ Q_0 \circ P$ est la somme de l'identité et d'applications polynomiales homogènes de degré supérieur ou égal à $i + 1$. Finalement, on montre que l'application $Q_k \circ \ldots \circ Q_0 \circ P$ est l'identité : en effet, c'est la somme de l'identité et d'applications polynomiales homogènes de degré supérieur ou égal $k + 1$ donc nulles puisque la règle de composition est la composition tronquée au degré k.

Ceci prouve l'existence d'un inverse à gauche, polynomial, de P.

2. La loi de composition tronquée étant une loi associative, pour montrer que P admet un inverse à droite, il suffit de montrer que l'inverse à gauche $Q_k \circ \ldots \circ Q_0$ de P admet lui-même un inverse à gauche. Pour cela, il suffit de montrer que chaque application Q_i admet un inverse à gauche, ce qui est trivial d'après le point précédent : Q_i est inversible à gauche si et seulement si sa partie linéaire est inversible et la partie linéaire de Q_i est inversible pour $i = 1$, et est l'identité, pour tout entier $i \neq 1$, qui est inversible.

□

Définition A.2.3. *Une application polynomiale $P : V \to V$ dont la partie linéaire est l'identité est dite* spéciale. *L'ensemble des applications polynomiales spéciales de degré k de V dans V est un sous-groupe de $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)$ noté $\mathrm{SP}^k_{\mathbb{K}}(V)$ et appelé* groupe spécial polynomial *de degré k de V.*

Notez que d'après le théorème précédent, toute application polynomiale spéciale est bien inversible dans $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)$.

Théorème A.2.4. *Toute application $\mathbb{K}$-polynomiale continue $P : V \to W$ est lisse sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Supposons que $P : V \to W$ soit une application continue polynomiale. D'après le théorème A.1.1, nous pouvons supposer sans perte de généralité que p est homogène de degré k. Supposons dans un premier temps que $P(x) = m(x, \dots, x)$, où $m : V^k \to W$ est multilinéaire. Comme P est continue, l'application

$$F : V \times V \to W, \quad (x, v) \mapsto p(x + v) = m(x + v, \dots, x + v)$$

est continue et polynomiale. En utilisant la multilinéarité, nous développons

$$p(x + v) = m(x + v, \dots, x + v) = \sum_{i=0}^{k} M^{k-i,i}(x, v), \tag{A.2.1}$$

où $M^{k-i,i}(x, v)$ est la somme des termes du développement de m contenant i fois l'argument v et $k - i$ fois l'argument x.[1] Le i-ème terme de (A.2.1) est la partie homogène de bidegré $(k - i, i)$ de l'application continue F, et par conséquent, d'après le théorème A.1.1, est une application continue en (x, v). Ensuite, pour tout t dans $\mathbb{K}^\times$, nous obtenons un développement similaire

$$P^{[1]}(x, v, t) = \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \sum_{i=1}^{k} t^{i-1} M^{k-i,i}(x, v),$$

et puisque $M^{k-i,i}(x, v)$ est continue, le membre de droite définit une application continue de (x, v, t), prouvant qu'une extension continue du quotient de différence existe, et donc que P est de classe $\mathcal{C}^{[1]}$. De plus, $P^{[1]}$ est à nouveau une application polynomiale continue, de degré total au plus $2k - 1$, et donc, par récurrence, nous déduisons que P est de classe $\mathcal{C}^{[\infty]}$.

Si $P(x)$ n'est pas donné directement par une application multilinéaire m, nous fixons un système de générateurs (e_i) de V et nous considérons le module libre E engendré par les e_i, muni de la projection canonique $E \to V$. L'application F se relève alors naturellement en une application $\tilde{F} : E^2 \times \mathbb{K} \to W$, que nous pouvons décomposer comme ci-dessus, donnant lieu à une application $\tilde{m}$ et à des applications $\tilde{M}^{k-i,i}$. En passant au quotient, nous voyons que les composantes bi-homogènes $M^{k-i,i}$ sont encore des applications continues, et $P^{[1]}$ peut être étendu de manière continue comme ci-dessus. □

1. Par exemple, pour $k = 3$, nous avons

$$M^{1,2}(x, v) = m(x, v, v) + m(v, x, v) + m(v, v, x).$$

Pour $k = 4$, nous avons

$$M^{2,2}(x, v) = m(x, x, v, v) + m(x, v, x, v) + m(x, v, v, x) + m(v, x, x, v) + m(v, x, v, x) + m(v, v, x, x).$$

Définition A.2.5. *Soit $P : V \to W$ une application $\mathbb{K}$-polynomiale qui soit de la forme $P(x) = m(x, \ldots, x)$ où $m : V^k \to W$ est $\mathbb{K}$-multilinéaire. Pour tous n dans $\mathbb{N}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{N}^n$ avec $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$ et $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, considérons la somme*

$$M^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v}) := m(v_1 : \alpha_1 ; \ldots ; v_n : \alpha_n)$$

de tous les termes $m(w_1, \ldots, w_k)$ avec exactement α_i éléments parmi les $w_1, \ldots, w_k$ égaux à v_i.

Lemme A.2.6. *Soit $P : V \to W$ une application de la forme $P(x) = m(x, \ldots, x)$ où $m : V^k \to W$ est $\mathbb{K}$-multilinéaire. Si P est continue, alors l'application*

$$M^{\boldsymbol{\alpha}} : V^n \to W, \quad \boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \mapsto M^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v}),$$

l'est également, et ne dépend pas du choix de m. Ainsi, nous pouvons écrire $P^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v}) := M^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v})$.

Démonstration. Le résultat est obtenu comme ci-dessus, en considérant l'application continue

$$F : V^n \to W, \quad \boldsymbol{v} \mapsto P\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) = m\left(\sum_{i=1}^{n} v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} v_i\right)$$

dont la composante $\boldsymbol{\alpha}$-homogène est précisément $M^{\boldsymbol{\alpha}}$. □

A.3 Extensions scalaires

Une *extension scalaire* de $\mathbb{K}$ est, par définition, une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{A}$ commutative et associative. Si $\mathbb{A}$ est unitaire, alors il existe une application naturelle $\mathbb{K} \to \mathbb{A}$, $t \mapsto t \cdot 1$.

Définition A.3.1. *Soit $P : V \to W$ une application $\mathbb{K}$-polynomiale, homogène de degré k. Si $P(x) = m(x, \ldots, x)$, où $m : V^k \to W$ est une application multilinéaire, alors l'*extension scalaire de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{A}$ *de P est l'application*

$$P_{\mathbb{A}} : V_{\mathbb{A}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A} \to W_{\mathbb{A}}, \quad \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i \mapsto P(v) \otimes a^k = m_{\mathbb{A}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right),$$

où $m_{\mathbb{A}} : (V_{\mathbb{A}})^k \to W_{\mathbb{A}}$ est l'application multilinéaire définie par la propriété universelle du produit tensoriel. Si le $\mathbb{K}$-module V n'est pas libre, alors nous considérons comme ci-dessus la surjection $E \to V$, définie par un système de générateurs, qui définit une application $\tilde{P}_{\mathbb{A}} : E_{\mathbb{A}} \to W_{\mathbb{A}}$. L'application $\tilde{P}_{\mathbb{A}}$ passe au quotient sur V en une application $P_{\mathbb{A}} : V_{\mathbb{A}} \to W_{\mathbb{A}}$.

Théorème A.3.2. *Soit $\mathbb{K}$ un anneau topologique avec groupe unité $\mathbb{K}^\times$ dense dans $\mathbb{K}$, et soit $\mathbb{A}$ une extension scalaire de $\mathbb{K}$, qui est une $\mathbb{K}$-algèbre topologique, homéomorphe à $\mathbb{K}^{n+1}$, relativement à une $\mathbb{K}$-base $(a_1, \ldots, a_n)$. Soit $P : V \to W$ une application $\mathbb{K}$-polynomiale. Nous munissons $V_{\mathbb{A}}$ de la topologie produit relativement à la décomposition*

$$V_{\mathbb{A}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K} a_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} (V \otimes a_i),$$

et faisons de même pour $W_{\mathbb{A}}$. Si P est continue, alors son extension scalaire $\mathbb{A}$-polynomiale $P_{\mathbb{A}} : V_{\mathbb{A}} \to W_{\mathbb{A}}$ l'est également.

Démonstration. Notez que la topologie sur $V_{\mathbb{A}}$ ne dépend pas du choix de la $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{A}$ car le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit par homéomorphismes. Supposons, sans perte de généralité, que P soit homogène de degré k et de la forme $P(x) = m(x, \ldots, x)$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{A}}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i\right) &= m_{\mathbb{A}}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i\right) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} m(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) \otimes a_{j_1} \cdots a_{j_k} \\
&= \sum_{(\alpha_1\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=k} M^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(v_1, \ldots, v_n) \otimes a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}, \\
&= \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}|=k} M^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme A.2.6, l'application $M^{\boldsymbol{\alpha}}$ est continue, et donc $P_{\mathbb{A}}$ est continue. Si P n'est pas de la forme $P(x) = m(x, \ldots, x)$, alors nous utilisons des arguments similaires à ceux de la fin de la preuve du théorème A.2.4. □

Remarque A.3.3. Si $\mathbb{A}$ est unitaire, alors nous avons une injection naturelle $\sigma^{\mathbb{A}} : V \to V_{\mathbb{A}}$, $v \mapsto v \otimes_{\mathbb{K}} 1_{\mathbb{A}}$, et $P_{\mathbb{A}}$ étend P au sens où le diagramme suivant commute

$$P_{\mathbb{A}} \circ \sigma^{\mathbb{A}} = \sigma^{\mathbb{A}} \circ P : \quad \begin{array}{ccc} V_{\mathbb{A}} & \xrightarrow{P_{\mathbb{A}}} & W_{\mathbb{A}} \\ {\scriptstyle \sigma^{\mathbb{A}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \sigma^{\mathbb{A}}} \\ V & \xrightarrow[P]{} & W \end{array}$$

Remarque A.3.4. Si P est comme dans le théorème, dépendant de plus continûment d'un paramètre y (disons, $P(x) = P_y(x)$, continue en le couple (x, y)), alors, puisque $M^{\boldsymbol{\alpha}}$ ne dépend pas du choix de m (voir le lemme A.2.6), la preuve du théorème montre que $(y, z) \mapsto (P_y)_{\mathbb{A}}(z)$ est à nouveau continue en le couple (y, z).

A.4 Applications polynomiales et algèbres de Weil

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Weil et soit V un $\mathbb{K}$-module. Nous allons étudier la structure des applications $\mathbb{A}$-polynomiales de $V_{\mathbb{A}}$ dans $V_{\mathbb{A}}$.

Proposition A.4.1. *1. L'application suivante*

$$\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}}) \simeq \mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}(V, V_{\mathbb{A}}) = \mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}(V, V) \oplus \mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V, V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right), \quad P \mapsto \underline{P} := P \circ \sigma^{\mathbb{A}}_V$$

est un isomorphisme d'inverse noté $P \mapsto \overline{P}$.

2. La suite de groupes suivante est exacte et scindée :

$$\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V, V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}}) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V),$$

où l'injection est définie par :

$$i : \mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V, V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) \to \mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}}), \quad P \mapsto \mathrm{id}_{V_{\mathbb{A}}} + \overline{P},$$

et où la surjection est définie par

$$\pi : \mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V), \quad P \mapsto p := \pi^{\mathbb{A}}_V \circ P \circ \sigma^{\mathbb{A}}_V.$$

3. *Par restriction, on obtient la suite de groupes exacte suivante :*

$$\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V, V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right) \hookrightarrow \mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})_{V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}} \twoheadrightarrow \mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)_0 \, .$$

Démonstration. 1. L'application est un isomorphisme. En effet, soit P est une application $\mathbb{A}$-polynomiale de $V_{\mathbb{A}}$ dans $V_{\mathbb{A}}$. On peut supposer sans perte de généralité que P est homogène de degré $0 \le i \le k$, et de la forme $P(\boldsymbol{v}) = m(\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v})$, où $m : V_{\mathbb{A}} \times \cdots \times V_{\mathbb{A}} \to V_{\mathbb{A}}$ est $\mathbb{A}$-multilinéaire. Alors P est de la forme suivante, où $(1 = a_0, a_1, \dots, a_n)$ désigne une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=0}^n v_i \otimes a_i\right) &= m\left(\sum_{i=0}^n v_i \otimes a_i, \dots, \sum_{i=0}^n v_i \otimes a_i\right) \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_i=0}^n m(v_{j_1}, \dots, v_{j_i}) \otimes a_{j_1} \cdots a_{j_i} \\ &= \sum_{j_1,\dots,j_i=0}^n \underline{m}(v_{j_1}, \dots, v_{j_i}) \otimes a_{j_1} \cdots a_{j_i} \\ &= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| = i} \underline{m}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}, \end{aligned}$$

où $\underline{m}$ désigne la restriction de m à $V \times \cdots \times V$ et a pour diagonale $\underline{P} := P \circ \sigma^{\mathbb{A}}_V$.

D'après le lemme A.2.6, cette application dépend entièrement de $\underline{P}$. P est donc entièrement déterminée par sa restriction à $\sigma^{\mathbb{A}}_V(V)$, qui se décompose naturellement en une partie finie $p : V \to V$ et une partie nilpotente $\underline{P}_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} : V \to V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$. L'application inverse est définie par prolongement par $\mathbb{A}$-multilinéarité de l'application $\mathbb{K}$-multilinéaire $\underline{m} : V \times \cdots \times V \to V_{\mathbb{A}}$, correspondant à $P : V \to V_{\mathbb{A}}$, en une application $\mathbb{A}$-multilinéaire $m : V_{\mathbb{A}} \times \cdots \times V_{\mathbb{A}} \to V_{\mathbb{A}}$, dont on note la diagonale $\overline{P} : V_{\mathbb{A}} \to V_{\mathbb{A}}$.

Cet isomorphisme munit l'ensemble $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}(V, V_{\mathbb{A}})$ d'une structure de monoïde.

2. (a) Montrons qu'une application P dans $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})$ est inversible si et seulement si son projeté $p := \pi(P)$ est inversible dans $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}(V)$.

D'après le théorème A.2.2, une application $\mathbb{A}$-polynomiale P dans $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})$ est inversible dans $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})$, dont on rappelle que la loi de groupe est la composition tronquée au degré k, si et seulement si sa partie $\mathbb{A}$-linéaire P_1 est inversible.

Or l'application P_1 est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_1\left(\sum_{i=0}^n v_i \otimes a_i\right) &= \sum_{i=0}^n P_1(v_i \otimes 1) a_i \\ &= \sum_{i=0}^n \underline{P}_1(v_i) a_i \\ &= \sum_{i=0}^n p_1(v_i) \otimes a_i + \sum_{i=0}^n Q(v_i) a_i, \end{aligned}$$

où on décompose $P_1 : V \to V_{\mathbb{A}}$ sous la forme $P_1 = p_1 + Q$, avec $p_1 : V \to V$ et $Q : V \to V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$. On obtient finalement

$$P_1\left(\sum_{i=0}^{n} v_i \otimes a_i\right) = (p_1)_{\mathbb{A}}\left(\sum_{i=0}^{n} v_i \otimes a_i\right) + Q_{\mathbb{A}}\left(\sum_{i=0}^{n} v_i \otimes a_i\right),$$

où $(p_1)_{\mathbb{A}}$ est l'extension algébrique de $p_1 : V \to V$ à $\mathbb{A}$, et où $Q_{\mathbb{A}} : V_{\mathbb{A}} \to V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$, l'extension algébrique de Q à $\mathbb{A}$. $Q_{\mathbb{A}}$ est une application linéaire descendante pour le drapeau canonique de $V_{\mathbb{A}}$, c'est-à-dire qu'elle envoie $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}_i}}$ dans $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}_{i+1}}}$ pour tout entier i, puisque $\overset{\circ}{\mathbb{A}_i} \cdot V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}} \subset V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}_{i+1}}}$, et qu'elle envoie $V_{\mathbb{A}}$ dans $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$. L'application P_1 est inversible si et seulement si l'application $(p_1)_{\mathbb{A}}$ est inversible, si et seulement si p_1 est inversible. En effet, l'inverse est alors donné par

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\left(p_1^{-1}\right)_{\mathbb{A}} \circ Q_{\mathbb{A}}\right)^i \circ \left(p_1^{-1}\right)_{\mathbb{A}},$$

puisque l'application descendante $Q_{\mathbb{A}}$ est nilpotente d'ordre $k+1$, de même que $\left(p_1^{-1}\right)_{\mathbb{A}} \circ Q_{\mathbb{A}}$.

Finalement, P est inversible si et seulement si p_1 est inversible, ce qui équivaut à dire que p est inversible, à nouveau d'après le théorème A.2.2.

(b) Montrons que l'injection est bien à valeurs dans $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})$ et que son image est le noyau de π.

Un polynôme P de $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V, V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)$ est envoyé par i sur l'application $\mathrm{id}_{V_{\mathbb{A}}} + \overline{P}$, qui est envoyée par π sur id_V (car $\overline{P}$ est à valeurs dans $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$) qui est inversible, ce qui prouve que i est bien définie. De plus, id_V est le neutre du groupe $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}(V)$, ce qui prouve que la suite est exacte.

(c) La section est donnée par $P \mapsto P_{\mathbb{A}}$ qui à une application $\mathbb{K}$-polynomiale associe son extension scalaire $\mathbb{A}$-polynomiale à $\mathbb{A}$.

3. Un polynôme de $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})$ stabilise $V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}$ si et seulement si son projeté dans $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}(V)$ est sans terme constant. De plus, l'extension d'une application $\mathbb{K}$-polynomiale P à $\mathbb{A}$ préserve la fibre en 0 si et seulement si P est sans terme constant.

□

Finalement, nous avons montré le théorème suivant :

Théorème A.4.2. *Le groupe* $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}})_{V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}}$ *est le produit semi-direct des groupes* $\mathrm{Pol}^k_{\mathbb{K}}\left(V, V_{\overset{\circ}{\mathbb{A}}}\right)$ *et* $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(V)_0$.

Annexe B

Généralités sur les variétés et les fibrés

B.1 Variétés

Définition B.1.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-module topologique, appelé* espace modèle *de la variété. Une* variété lisse sur $\mathbb{K}$ (avec atlas, et modelée sur V) *est une paire $(M, \mathcal{A})$, où M est un espace topologique et $\mathcal{A}$ est un* $\mathbb{K}$-atlas de M, *c'est-à-dire*

- *un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M,*
- *des bijections $\phi_i : U_i \to V_i := \phi_i(U_i)$ dans des ouverts V_i de V, tels que les* changements de cartes $\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1}{}_{|V_{ji}} : V_{ji} \to V_{ij}$ *soient lisses, où $V_{ij} := \phi_i(U_i \cap U_j)$.*

Dans notre travail, il sera utile de toujours considérer qu'une variété est donnée avec un atlas, maximal ou non. Bien sûr, nous pourrions définir de même les variétés de classe $\mathcal{C}^{[k]}_{\mathbb{K}}$.

Les applications de classe $\mathcal{C}^{[k]}$ entre deux variétés sont définies de manière usuelle : une application $f : M \to N$ entre deux variétés lisses sur $\mathbb{K}$ est dite *de classe* $\mathcal{C}^{[k]}$ si, pour toutes cartes (ϕ, U) de M et (ψ, W) de N, l'application

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(W)) \to \psi(W)$$

est de classe $\mathcal{C}^{[k]}$. La règle de composition 3.1.4 montre que les variétés lisses sur $\mathbb{K}$ forment une catégorie, notée $\mathcal{M}an_{\mathbb{K}}$.

Le théorème suivant énonce qu'il est possible de construire une variété lisse à partir d'un espace modèle et d'applications lisses vérifiant les relations de cocycle.

Théorème B.1.2 (de construction des variétés par cocycles)**.** *Considérons les données suivantes*

- *un $\mathbb{K}$-module topologique V,*
- *des ouverts $(V_{ij})_{i,j\in I} \subset V$ tels que $V_{ij} \subset V_{ii}$, pour tous i et j dans I, où I est un ensemble d'indices discret,*
- *des applications bijectives $(\phi_{ij})_{i,j\in I} : V_{ji} \to V_{ij}$ lisses sur $\mathbb{K}$ qui satisfont les relations de cocycle*

$$\phi_{ii} = \mathrm{id} \text{ et } \phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik} \quad \text{(là où elles sont définies).}$$

Alors il existe une variété lisse sur $\mathbb{K}$ de modèle V, de recouvrement ouvert $U_i := \phi_{ii}^{-1}(V_{ii})$, $i \in I$, et de changements de cartes ϕ_{ij}.

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$S := \{(i,x) \in I \times V \mid x \in V_{ii}\}.$$

Munissons S de la relation d'équivalence suivante :

$$(i,x) \sim (j,y) \text{ si et seulement si } \phi_{ij}(y) = x.$$

Nous pouvons définir la variété M comme étant l'ensemble des classes d'équivalence $M := S/\sim$, muni de la topologie quotient. Un atlas est donné par le recouvrement

$$U_i := \{[i,x] \in M, \ x \in V_{ii}\}$$

et par les cartes

$$\phi_i : U_i \to V_{ii}, \quad [(i,x)] \mapsto x.$$

L'ensemble $\phi_i(U_i \cap U_j)$ est l'ensemble des points x dans V_{ii} tels que $[i,x]$ appartienne à U_j, c'est-à-dire tels qu'il existe y dans V_{jj} vérifiant $[i,x] = [j,y]$. Or un tel y est unique, s'il existe, égal à $\phi_{ji}(x)$, ce qui équivaut à dire que x appartient à V_{ij}. Finalement, $\phi_i(U_i \cap U_j) = V_{ij}$. Les changements de cartes sont alors donnés par

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : V_{ji} \to V_{ij}, x \mapsto [j,x] = [i, \phi_{ij}(x)] \mapsto \phi_{ij}(x).$$

Ainsi, les changements de cartes sont bien les applications $\phi_i \circ \phi_j^{-1} = \phi_{ij}$. □

Notez qu'il est possible de ne pas considérer la condition $V_{ij} \subset V_{ii}$ et alors les changements de cartes sont des restrictions des applications ϕ_{ij} à $V_{jj} \cap V_{ji}$, co-restreintes à leurs images $V_{ii} \cap V_{ij}$.

Deux variétés lisses qui ont le même modèle, le même recouvrement ouvert et les mêmes changements de cartes sont dites *équivalentes*. Elles sont canoniquement isomorphes, car canoniquement isomorphes à la variété construite par cocycles à partir de ces données. L'isomorphisme canonique entre une variété M et la variété $\tilde{M}$ construite par cocycles est l'application qui, à tout élément x dans U_i, associe la classe $[i, \phi_i(x)] \subset \tilde{M}$. Nous identifierons toujours les variétés équivalentes.

Le théorème de construction par cocycles sera utilisé de la manière suivante : lorsque nous allons considérer un foncteur dans la catégorie des variétés, il nous suffira de décrire son action sur les cartes et sur les applications lisses. En effet, une variété est équivalente à la donnée de son modèle, de ses ouverts et de ses changements de cartes. Nous déterminerons leurs images par le foncteur. Si le foncteur est covariant et préserve les produits cartésiens, alors les changements de cartes vérifieront encore les relations de cocycle et ces données permettront de reconstruire une nouvelle variété.

Donnons la définition, assez forte, de sous-variété :

Définition B.1.3. *Soit W un sous-module d'un $\mathbb{K}$-module topologique V. On dit que W est* admissible *s'il existe un sous-module complémentaire W' de W dans V tel que la bijection $W \times W' \to V, (w,w') \mapsto w + w'$ soit un homéomorphisme. Une* sous-variété *d'une variété M, d'atlas $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_i$ et modelée sur V est un sous-ensemble N de M tel qu'il existe un sous-atlas de $\mathcal{A}$ tel que $\phi_i(U_i \cap N)$ soit un sous-module admissible de V ou soit vide.*

La définition suivante sera utile lorsque nous considérerons la structure des fibres des fibrés polynomiaux.

Définition B.1.4. *Une variété (avec atlas) est dite* polynomiale de degré k *si ses changements de cartes sont polynomiaux de degré au plus k.*

Si de plus les changements de cartes sont sans terme constant, alors la variété possède un point de base naturel. En particulier, une variété $\mathbb{K}$-polynomiale de degré 1 est un espace $\mathbb{K}$-affine. Si, de plus, les changements de cartes sont sans terme constant, alors la variété est un $\mathbb{K}$-module. Naturellement, tout $\mathbb{K}$-module ou tout espace $\mathbb{K}$-affine topologique est une variété lisse sur $\mathbb{K}$.

B.2 Fibrés lisses

Nous allons définir la notion de fibré et donner un théorème de construction par cocycles analogue au théorème B.1.2 donné dans le cas des variétés, qui nous permettra de ne travailler qu'avec des ouverts et des applications lisses entre $\mathbb{K}$-modules topologiques. Nous définissons ensuite différents types de fibrés (fibrés polynomiaux, lisses, principaux, associés) et nous rappelons quelques résultats élémentaires de la théorie des fibrés.

Définitions

Définition B.2.1. *Un* fibré lisse sur $\mathbb{K}$ *(avec atlas) est la donnée de :*

1. *une application $\pi : E \to M$, lisse sur $\mathbb{K}$, surjective, d'une variété E lisse sur $\mathbb{K}$ (l'*espace total*), vers une variété M lisse sur $\mathbb{K}$ (la* base*),*
2. *une* fibre type *: une variété F lisse sur $\mathbb{K}$,*
3. *un* atlas de fibré*, qui implique la condition de* trivialité locale*, c'est-à-dire*
   - *un atlas $(U_i, \phi_i)_i$ de variété lisse sur $\mathbb{K}$ de M, et*
   - *des $\mathbb{K}$-difféomorphismes $\alpha_i : \pi^{-1}(U_i) \to V_i \times F$, appelés* cartes de fibrés*, tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} E \supset \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & V_i \times F \arrow[d, "\phi_i^{-1} \circ \mathrm{pr}_{V_i}"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

Les fibrés lisses sur $\mathbb{K}$ forment une catégorie, notée $\mathcal{B}un_{\mathbb{K}}$.

Notez qu'un fibré est toujours considéré comme étant muni d'un atlas. Les cartes de fibré sont des cartes de variété pour l'espace total seulement dans le cas où la fibre type est un $\mathbb{K}$-module topologique car dans ce cas, $V_i \times F$ est un ouvert du $\mathbb{K}$-module topologique $V \times F$, modèle de la variété E.

Nous serons amenés dans la suite à considérer les *données de recollement*

$$\beta_{ij} := \mathrm{pr}_F \circ \alpha_{ij} : V_{ij} \times F \to F.$$

Définition B.2.2. *Un* morphisme de fibrés lisses sur $\mathbb{K}$ *entre* $\pi : E \to M$ *et* $\pi' : E' \to M'$ *est une paire d'applications* (F, f)*, où* $F : E \to E'$ *et* $f : M \to M'$ *sont des applications lisses sur* $\mathbb{K}$ *telles que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, on dit que F est *sur* f ou *au-dessus de* f, et que f est *sous* F.

Dans le cas où $M' = M$, un morphisme (F, id_M) de fibrés lisses sur $\mathbb{K}$ entre deux fibrés sur M est dit *morphisme de fibrés sur* M.

Un *sous-fibré* $E' \to M'$ d'un fibré $E \to M$ est la restriction d'un fibré $\pi : E \to M$ à des sous-variétés E' de E et M' de M.

Proposition B.2.3. *Considérons un fibré* $\pi : E \to M$ *lisse sur* $\mathbb{K}$*. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout point* x *de* M *la* fibre $\pi^{-1}(x)$ en x*, est* $\mathbb{K}$*-difféomorphe à la fibre type* F*. De plus, la bijection (non canonique) est donnée par les cartes du fibré.*
2. *Les changements de cartes* $(\alpha_{ab})_{a,b\in I}$ *vérifient des relations dite de* cocycle *:*

$$\forall i, j, k \in I,\ \alpha_{ij} \circ \alpha_{jk} = \alpha_{ik} \text{ et } \alpha_{ii} = \mathrm{id}, \quad \text{là où ces applications sont définies.}$$

Construction d'un fibré par cocycles

Nous allons présenter la construction d'un fibré par cocycles, qui nous permettra de nous restreindre à l'étude d'un atlas d'un fibré.

Théorème B.2.4 (de construction des fibrés par cocycles)**.** *Soit* M *une variété lisse sur* $\mathbb{K}$*, modelée sur un* $\mathbb{K}$*-module* V*, d'atlas constitué du recouvrement ouvert* $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ *et des cartes* $x_i : U_i \to V_i \subset V$ *et soit* F *une variété lisse sur* $\mathbb{K}$*, modelée sur un* $\mathbb{K}$*-module* W*, d'atlas le recouvrement ouvert* $F = \bigcup_{j\in J} O_j$ *et les cartes* $y_j : O_j \to W_j \subset W$*.*

Supposons données des applications $\mathbb{K}$*-lisses* $\alpha_{ij} : V_{ij} \times F \to V_{ij} \times F$ *pour tous* i *et* j *dans* I*, qui vérifient les relations de cocycle, et qui soient de la forme*

$$\alpha_{ij} : V_{ij} \times F \to V_{ij} \times F, (x, y) \mapsto (x_{ij}(x), \beta_{ij}(x, y)),$$

où on a posé $\beta_{ij} := \mathrm{pr}_F \circ \alpha_{ij}$*, c'est-à-dire qui soient au-dessus des changements de cartes de* M*.*

Alors il existe un fibré lisse sur $\mathbb{K}$*, de base* M*, de fibre type* F *et de changement de cartes* α_{ij}*. De plus, l'espace total est une variété lisse sur* $\mathbb{K}$*, modelée sur le* $\mathbb{K}$*-module* $V \times W$*.*

Démonstration. L'idée consiste à reprendre la définition d'un fibré et à construire chaque application en partant de la fin. On considère les (futurs) changements de cartes

$$\alpha_{ij} : V_{ij} \times F \to V_{ij} \times F, (x, y) \mapsto (x_{ij}(x), \beta_{ij}(x, y))$$

qui sont lisses sur $\mathbb{K}$ et vérifient les relations de cocycle. On définit ensuite $\widetilde{E} := \bigsqcup_{i \in I} U_i \times F$ de projection naturelle $\widetilde{\pi} := \mathrm{pr}_1$ sur M. $\widetilde{E}$ est alors une variété lisse sur $\mathbb{K}$ (non nécessairement séparable même dans le cas réel). On a alors $U_i \times F \subset \widetilde{\pi}^{-1}(U_i)$, ce dernier étant beaucoup plus gros en général car il contient tous les $U_j \times F$ avec j tel que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. On définit alors les applications $\alpha_i : U_i \times F \to V_i \times F$, lisses sur $\mathbb{K}$, en posant $\alpha_i := x_i \times \mathrm{id}_F$. Remarquez que ces applications sont définies sur $U_i \times F$ et non pas sur $\widetilde{\pi}^{-1}(U_i)$. Sur $\widetilde{E}$, on définit la relation d'équivalence engendrée par :

$$\forall x \in U_i \cap U_j, \forall y \in F,\ (x,y) \in U_i \times F \sim (x, \beta_{ij}(x,y)) \in U_j \times F.$$

On définit $E := \widetilde{E}/\sim$ comme étant le quotient de $\widetilde{E}$ par cette relation d'équivalence, muni de la topologique quotient. La projection $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to M$ passe au quotient en une application $\pi : E \to M$.

$E := \widetilde{E}/\sim$ est une variété lisse sur $\mathbb{K}$, modelée sur $V \times W$.
En effet, son atlas est :
– le recouvrement ouvert $E = \bigcup_{i \in I, j \in J} (U_i \times O_j) / \sim$,
– les cartes

$$z_{ij} : (U_i \times O_j) / \sim \to z_{ij}((U_i \times O_j) / \sim) \subset V \times W, [x,y] \mapsto (x_i(x), y_j(y)).$$

Notez que le représentant (x,y) choisi pour la classe $[x,y]$ est précisément celui appartenant à $U_i \times O_j$. Les changements de cartes sont alors égaux à

$$z_{ij} \circ z_{kl}^{-1} : (x,y) \mapsto [x_k^{-1}(x), y_l^{-1}(y)] = [\alpha_{ik}(x_k^{-1}(x), y_l^{-1}(y))] \mapsto (x_i \times y_j)\left(\alpha_{ik}(x_k^{-1}(x), y_l^{-1}(y))\right)$$

et sont bien lisses sur $\mathbb{K}$.

E est alors un fibré lisse sur $\mathbb{K}$, de base M, de fibre type F, de changements de cartes α_{ij} et d'atlas de fibré :
– le recouvrement ouvert $E = \bigcup_{i \in I} (U_i \times F) / \sim$
– les cartes $\overline{\alpha_i} : (U_i \times F) / \sim \to V_i \times F$, lisses sur $\mathbb{K}$, qui sont définies comme étant les applications α_i lisses sur $\mathbb{K}$ passées au quotient.

□

Notez que cette construction est la même, quelle que soit la fibre F.

Une question se pose alors naturellement : si nous considérons au départ un fibré, quel est le lien entre le fibré construit par cocycles à l'aide de ses fonctions de transition ou ses changements de cartes et ce fibré ? Ces deux fibrés sont en fait en bijection, la bijection étant donnée par les cartes de fibrés. À un élément z de U_i de l'espace total E, on associe la classe d'équivalence (élément du fibré construit) de l'élément $\alpha_i(z)$ de $V_i \times F \subset \widetilde{E}$, cette opération étant bien définie par construction même de $\widetilde{E}$. Plus précisément, cette bijection est en fait un isomorphisme de fibrés sur M. On a donc un isomorphisme *canonique* de fibrés. Nous pourrons donc identifier et considérer indifféremment un fibré et le fibré construit par cocycles.

Finalement, nous avons démontré la proposition suivante :

Proposition B.2.5. *Si deux fibrés ont la même base, la même fibre type et les mêmes changements de cartes, alors ils sont isomorphes canoniquement.*

Remarquez que, dans la construction du fibré par cocycles, la connaissance d'un atlas de variété de la fibre type F n'est nécessaire que pour munir l'espace total E d'une structure de variété *avec atlas.*

Définition B.2.6. *Un* fibré avec section *est un fibré muni d'une section $\sigma : M \to E$, lisse sur $\mathbb{K}$, de $\pi : E \to M$, et un* morphisme de fibrés avec sections *est un morphisme de fibrés qui commute avec les sections :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Phi"] & E' \\ M \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\phi"'] & M' \arrow[u, "\sigma'"'] \end{tikzcd}$$

Les fibrés lisses sur $\mathbb{K}$ avec sections, forment une catégorie, notée $\mathcal{S}Bun_{\mathbb{K}}$.

Définition B.2.7. *Une* suite exacte (courte) de fibrés sur M *est une suite de fibrés sur* M

$$E \overset{i}{\hookrightarrow} E' \overset{p}{\twoheadrightarrow} E''$$

telle que le fibré $E'' \to M$ soit un fibré avec section σ, telle que i soit injective et p surjective, et telle que $i(E) = p^{-1}(\sigma(M))$.

B.3 Groupes structuraux

Définition B.3.1. *Un* fibré avec groupe structural *est un fibré muni d'un* type*, c'est-à-dire une opération à gauche $\mu : G \times F \to F$, $(g, y) \mapsto \rho(g)y$ d'un groupe G, appelé* groupe structural*, sur la fibre type F. On demande de plus que les cartes de fibré soient* G-compatibles*, au sens où, pour tout changement de cartes de fibré*

$$\alpha_{ij} := \alpha_i \circ \alpha_j^{-1} : V_{ij} \times F \to V_{ij} \times F,$$

il existe une application $\gamma_{ij} : V_{ij} \to G$ appelée fonction de transition *qui satisfait à la condition $\alpha_{ij}(x, y) = (\phi_{ij}(x), \rho(\gamma_{ij}(x))y)$.*

Les données de recollement prennent alors la forme suivante

$$\beta_{ij} := \mathrm{pr}_F \circ \alpha_{ij} : V_{ij} \times F \to F, \quad (x, y) \mapsto \rho(\gamma_{ij}(x))y.$$

Notez que, si nous fixons x dans V_{ij}, alors les applications

$$F \to F, \quad y \mapsto \rho(\gamma_{ij}(x))y$$

sont des difféomorphismes sur $\mathbb{K}$, ce qui permet de considérer $\rho(G)$ comme un sous-groupe du groupe $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$ des difféomorphismes sur $\mathbb{K}$ de F. On dit que G agit de manière lisse sur F.

Définition B.3.2. *Un groupe G, muni d'une action $\rho : G \to \mathrm{Bij}(F)$ sur la fibre type d'un fibré $\pi : E \to M$ avec atlas est* un groupe structural du fibré $\pi : E \to M$ *si et seulement si $\rho(G) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$ et si les changements de cartes de fibré sont fibre à fibre des éléments de $\rho(G)$.*

Remarque B.3.3. 1. Tout fibré lisse sur $\mathbb{K}$ peut être vu comme un fibré avec groupe structural $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$, où F est la fibre type, et action $\rho = \mathrm{id}_{\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)}$. $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$ est appelé le *groupe structural maximal* du fibré $\pi : E \to M$. En effet, la compatibilité des cartes, c'est-à-dire la provenance d'une action du groupe structural, est alors automatiquement vérifiée. Notez que ce groupe est indépendant de l'atlas de fibré considéré.

2. Il peut exister plusieurs groupes structuraux pour un même fibré. Plus le groupe structural déterminé est petit, plus le fibré admet de structures.
3. Il existe un groupe structural minimal au sens de l'inclusion : le groupe engendré par les restrictions $(\beta_{ij})_x : V \to V$ aux fibres en des points x de M des changements de cartes β_{ij}. Ce groupe, noté $G_{\min}$ est appelé le *groupe structural minimal* du fibré $\pi : E \to M$. Notez que ce groupe dépend de l'atlas de fibré.

Finalement, les groupes structuraux d'un fibré $\pi : E \to M$ sont les groupes G munis d'une action ρ sur la fibre type F telle que

$$G_{\min} \subset \rho(G) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F).$$

Définition B.3.4. *Soit E un fibré lisse sur $\mathbb{K}$ avec groupe structural G. Si de plus les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *le groupe structural G est un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$,*
2. *l'action du groupe structural G sur la fibre type F est* fortement lisse *sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mu : G \times F \to F$ est lisse sur $\mathbb{K}$,*
3. *les fonctions de transition $\gamma_{ij} : V_{ij} \to G$ sont lisses sur $\mathbb{K}$,*

alors le fibré E est dit fibré fortement lisse *sur $\mathbb{K}$.*

Notez que même dans le cadre classique, la question se pose de savoir si la structure différentiable du groupe structural est la même que celle du fibré. Le groupe structural peut ne posséder aucune structure de groupe de Lie. L'exemple des fibrés complexes est de ce point de vue assez intéressant : il est possible de considérer les fibrés complexes dont les groupes structuraux sont des groupes de Lie réels ou ceux dont les groupes structuraux sont des groupes de Lie complexes. Ces deux concepts sont différents et la possibilité de réduire un groupe structural réel en un groupe structural complexe révèle par exemple l'existence d'une structure presque-complexe sous-jacente.

Proposition B.3.5. *Considérons un fibré lisse sur $\mathbb{K}$ avec groupe structural G. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Toute structure et toute propriété sur la fibre F invariante par le groupe structural G se transportent canoniquement sur l'espace total E fibre à fibre.*
2. *Les fonctions de transition $(\gamma_{ab})_{a,b\in I}$ vérifient les relations de cocycle :*

$$\forall i, j, k \in I, \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k,\ \gamma_{ij}(x_{jk}(x)) \circ \gamma_{jk}(x) = \gamma_{ik}(x).$$

En particulier, comme la fibre F est une variété et que le groupe structural G agit par difféomorphismes, chaque fibre possède une structure canonique de variété.

Il existe une version du théorème de construction d'un fibré par cocycles pour les fibrés avec groupe structural.

Théorème B.3.6 (de construction des fibrés par cocycles)**.** *Soit M une variété lisse sur $\mathbb{K}$, modelée sur un $\mathbb{K}$-module V, d'atlas constitué du recouvrement ouvert $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ et des cartes $x_i : U_i \to V_i \subset V$ et soit F une variété lisse sur $\mathbb{K}$, modelée sur un $\mathbb{K}$-module W, d'atlas le recouvrement ouvert $F = \bigcup_{j \in J} O_j$ et les cartes $y_j : O_j \to W_j \subset W$. Soit G un groupe (respectivement groupe de Lie) sur $\mathbb{K}$ agissant de manière $\mathbb{K}$-lisse (respectivement fortement $\mathbb{K}$-lisse) sur F. Supposons données des applications $\gamma_{ij} : V_{ij} \to G$ pour tous i et j dans I, lisses sur $\mathbb{K}$ et vérifiant les relations de cocycle. Alors il existe un fibré lisse (respectivement fortement lisse) sur $\mathbb{K}$, de base M, de groupe structural G, de fibre type F et de fonctions de transition γ_{ij}.*

Notez que $\rho(G)$, où G désigne le (futur) groupe structural du fibré, est bien un sous-groupe du groupe $\mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(F)$ des $\mathbb{K}$-difféomorphismes de F car les applications α_{ij} sont lisses sur $\mathbb{K}$, donc l'application partielle à x dans V_{ij} fixé, $F \mapsto F$, $y \mapsto \rho(\gamma_{ij}(x))y$ est lisse sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. La preuve est la même que précédemment, il suffit de construire les changements de cartes à partir des fonctions de transition :

$$\alpha_{ij} : V_{ij} \times F \to V_{ij} \times F, (x, y) \mapsto (x_{ij}(x), \rho(\gamma_{ij}(x))y)$$

qui sont lisses sur $\mathbb{K}$ et vérifient les relations de cocycle.

Si de plus G est un groupe de Lie sur $\mathbb{K}$ agissant de manière fortement $\mathbb{K}$-lisse sur F, alors E est un fibré fortement lisse sur $\mathbb{K}$ de base M de groupe structural G de fibre F, de fonctions de transition γ_{ij}. □

La proposition suivante est similaire à la proposition B.2.5.

Proposition B.3.7. *Si deux fibrés ont la même base, le même type et les mêmes fonctions de transition, alors ils sont isomorphes canoniquement.*

B.4 Fibrés polynomiaux

Les fibrés polynomiaux généralisent les fibrés vectoriels et les fibrés affines. La plupart des fibrés que nous considérons (fibrés de Weil, fibrés induits par une extension polynomiale d'algèbres de Weil) possède cette structure.

Définition B.4.1 (Fibrés polynomiaux)**.** *Soient V et W deux $\mathbb{K}$-modules topologiques.*

1. *Un fibré avec atlas est dit* $\mathbb{K}$-polynomial de degré k *si sa fibre type F est un $\mathbb{K}$-module et si les changements de cartes de fibré α_{ij} sont $\mathbb{K}$-polynomiaux de degré k fibre à fibre (ceci revient à dire que le groupe $\mathrm{GP}^k_{\mathbb{K}}(F)$ muni de son action naturelle sur F est un groupe structural du fibré). En particulier, un* fibré affine *est un fibré polynomial de degré* 1.
2. *Une application $f : E \to E'$ entre deux fibrés avec atlas est appelée* intrinsèquement $\mathbb{K}$-linéaire (resp. $\mathbb{K}$-polynomiale) *si les fibres type sont des $\mathbb{K}$-modules, si elle préserve les fibres, et si, relativement à toutes les cartes données par les atlas, la représentation dans des cartes $f : E_x \to E'_{f(x)}$ est $\mathbb{K}$-linéaire (resp. $\mathbb{K}$-polynomiale).*
3. *Un* morphisme F de fibrés polynomiaux *entre deux fibrés polynomiaux avec atlas est un morphisme de fibrés qui soit intrinsèquement polynomial. Il est dit* spécial *si la partie linéaire des restrictions F_x aux fibres sur M est l'identité dans toutes les cartes données par les atlas.*

Notez que toute fibre d'un fibré polynomial possède une structure de variété polynomiale, d'après la proposition B.3.5 (i) puisque les changements de cartes agissent polynomialement fibre à fibre.

Définition B.4.2. *Un* fibré polynomial sans terme constant *est un fibré polynomial dont les changements de cartes de fibré sont sans terme constant. Un tel fibré possède alors une section canonique, appelée* section nulle.

En particulier, un fibré affine sans terme constant est un *fibré vectoriel.* Notez qu'on parle de fibré vectoriel même si les fibres sont des $\mathbb{K}$-modules et pas nécessairement des espaces vectoriels. Clairement, toute fibre d'un fibré affine est un espace affine et toute fibre d'un fibré vectoriel est un $\mathbb{K}$-module.

B.5 Fibrés principaux

Définition B.5.1. *Soit G un groupe de Lie. Un* fibré G-principal *est un fibré lisse avec groupe structural, tel que la fibre F soit égale au groupe structural G agissant naturellement sur lui-même par multiplication à gauche.*

Si le groupe structural est un sous-groupe de G, nous dirons encore que le fibré est un fibré G-principal. Ce sera en particulier le cas des fibrés verticaux des fibrés principaux, que nous étudierons au théorème 12.2.8.

Notez que tout fibré principal est fortement lisse, le groupe G étant également la fibre type, G doit être une variété lisse et l'action étant fortement lisse, la multiplication l_g doit être un difféomorphisme.

Notation B.5.2. Dans le cas d'un fibré principal, nous utiliserons les notations suivantes :

- l'espace total P,
- la base M de recouvrement ouvert $\bigcup_{i\in I} U_i$,
- la projection $p : P \to M$,
- le groupe structural (et donc la fibre) G.

Propriétés

Soit $p : P \to M$ un fibré G-principal lisse sur $\mathbb{K}$. En notant $\alpha_i : p^{-1}(U_i) \to V_i \times G$ les cartes, on obtient les changements de cartes suivants :

$$\alpha_{ij} := \alpha_i \circ \alpha_j^{-1} : V_{ij} \times G, V_{ij} \times G, (x, g) \mapsto (x_{ij}(x), \gamma_{ij}(x)g),$$

avec les fonctions $\gamma_{ij} : V_{ij} \to G$ lisses sur $\mathbb{K}$ vérifiant les relations de cocyle. L'action à gauche considérée $\rho = l : G \to l(G) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(G), g \mapsto l_g$ est un isomorphisme de groupe sur son image. Il est également possible de considérer l'action à droite

$$r : G \to r(G) \subset \mathrm{Diff}_{\mathbb{K}}(G), g \mapsto r_g.$$

Or les translations à droite commutent aux translations à gauche et sont ainsi compatibles avec le groupe structural. L'action à droite de G sur la fibre type se transporte donc sur l'espace total et ce, de manière unique.

Proposition B.5.3. *Soit $p : P \to M$ un fibré G-principal d'atlas de fibré $(U_i, \alpha_i)_{i\in I}$. Alors il existe une unique action à droite $R : P \times G \to P, (z, g) \mapsto R(z, g) =: z.g =: R_g(z) =: L_z(g)$ telle que*

$$\forall z \in p^{-1}(U_i), \alpha_i(z.g) = (x_i(p(z)), (\beta_i(z))g).$$

De plus, cette action est libre et lisse sur $\mathbb{K}$.

Les orbites de l'action à droite sont exactement les fibres, c'est-à-dire $M = P/G$. Tout fibré principal sera considéré muni de cette action canonique.

Morphismes de fibrés principaux

Définition B.5.4. *Soient $p : P \to M$ un fibré G-principal et $p' : P' \to M'$ un fibré G'-principal, tous deux lisses sur $\mathbb{K}$. Un morphisme de fibrés $(f, \check{f})$ est dit morphisme de fibrés principaux s'il existe un homomorphisme de groupes de Lie $\alpha : G \to G'$, lisse sur $\mathbb{K}$ et tel que*

$$\forall z \in P, \forall g \in G,\ f(zg) = f(z)\alpha(g).$$

On dit que l'homomorphisme α *entrelace* les actions de G sur P et de G' sur P'. Il s'agit de la notion naturelle d'homomorphisme pour les actions. On a ainsi :

$$\forall g \in G,\ f \circ R^P_g = R^{P'}_{\alpha(g)} \circ f,$$

où R^P_g désigne l'action à droite d'un élément g de G sur P.

Remarquez que, dans le cas des fibrés vectoriels, qui possèdent une structure canonique d'espace vectoriel, on demande que l'application f soit linéaire fibre à fibre. Dans le cas des fibrés principaux, les fibres possèdent des structures canoniques d'espaces homogènes principaux, mais pas de structure de groupe. Demander que f soit un homomorphisme de groupes n'a donc pas de sens.

B.6 Fibrés associés

Proposition B.6.1. *Soient $p : P \to M$ un fibré G-principal lisse sur $\mathbb{K}$ et F une variété lisse sur $\mathbb{K}$, sur laquelle G agit à gauche de manière lisse sur $\mathbb{K}$ via une application ρ. Alors G agit librement à droite sur $P \times F$ par :*

$$(P \times F) \times G \to P \times F, ((z, y), g) \mapsto (zg, g^{-1}y).$$

De plus, le quotient $(P \times F)/G$ noté $P \times_G F$ est une variété lisse sur $\mathbb{K}$ et l'application $p \circ \mathrm{pr}_P : P \times F \to M$ passe au quotient en une application notée $\pi : P \times_G F \to M$ qui est un fibré de type (G, F, ρ).

Lemme B.6.2. *$G \times_G F$ est canoniquement $\mathbb{K}$-difféomorphe à F de la manière suivante :*

$$\phi : G \times_G F \to F, [g, y] \mapsto g.y$$

Démonstration. 1. ϕ est bien définie car $\phi([gg', g'^{-1}y]) = gg'g'^{-1}y = gy$.

2. Elle est de plus surjective car $\phi([e, f]) = f$.

3. Elle est injective car si $\phi([g, y]) = \phi([g', y'])$, on a $gy = g'y'$. Par conséquent, $[g, f] = [e, gf] = [e, g'f'] = [g', f']$.

□

Démonstration. (de la proposition) Si on note $(U_i)_{i\in I}$ les domaines de cartes de fibré de P et γ_{ij} ses fonctions de transition, alors les (U_i) sont également les domaines de cartes de fibré de $P \times_G F$ et ses fonctions de transition sont également les fonctions γ_{ij}. En effet, considérons une carte de fibré de P : $\alpha_i : p^{-1}(U_i) \to V_i \times G$. On obtient alors naturellement une carte de fibré de $P \times F$: $(\alpha_i, \mathrm{id}_M) : p^{-1}(U_i) \times F \to V_i \times G \times F$. On passe au quotient sous l'action de G : le membre de gauche devient alors $p^{-1}(U_i) \times_G F$. Le groupe G n'agit pas sur V_i, donc le membre de droite devient $(G \times F)/G$ où l'action de G à droite sur $G \times F$ est donnée par :

$$G \times F \times G \to G \times F, ((g, y), g') \mapsto (gg', g'^{-1}.y).$$

La fibre de $P \times_G F$ est donc $G \times_G F$, qui est isomorphe à F d'après le lemme précédent. Finalement, la fibre de $P \times_G F$ est F sur lequel le groupe G agit à gauche via l'application ρ (que l'on a omis ici). □

Les cartes de l'atlas du fibré associé sont :

$$\overline{\alpha_i} : \pi^{-1}(U_i) = p^{-1}(U_i) \times_G F \to V_i \times F, [z, y] \mapsto x_i((p(z)), \mathrm{pr}_G(\alpha_i(z))y).$$

Remarquez que les fonctions de transitions sont exactement les mêmes que celles de P. En effet, on a :

$$\overline{\alpha_{ij}} := \overline{\alpha_i} \circ (\overline{\alpha_j})^{-1}, V_{ij} \times F \to V_{ij} \times F, (x, y) \mapsto (x_{ij}(x), \gamma_{ij}(x)y)$$

et nous avons bien les mêmes fonctions de transition γ_{ij} à valeurs dans G. Finalement, le fibré associé est le même fibré que le fibré principal, mais avec une fibre type différente.

Définition B.6.3. *Soient $p : P \to M$ un fibré G-principal lisse sur $\mathbb{K}$ et F une variété lisse sur $\mathbb{K}$, sur laquelle G agit à gauche de manière lisse sur $\mathbb{K}$. Alors le fibré $\pi : P \times_G F \to M$ lisse sur $\mathbb{K}$ est dit* fibré associé *au fibré G-principal P.*

Dans un sens plus général, nous pouvons également dire que deux fibrés (même non fortement lisses) sont associés si et seulement s'ils peuvent être vus comme des fibrés lisses, associés au même fibré principal (au sens algébrique car le groupe structural n'a pas nécessairement de structure de groupe de Lie ou même de topologie).

Théorème B.6.4. *Tout fibré fortement lisse sur $\mathbb{K}$ peut être vu comme un fibré associé à un fibré principal (nécessairement fortement) lisse sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Nous avons vu à la proposition B.2.5 que si deux fibrés au-dessus d'une même base ont même type et mêmes fonctions de transition, alors ils sont isomorphes.

Considérons la base M du fibré E et ses fonctions de transition. Construisons par cocycles le fibré principal P de fibre le groupe structural G de E, c'est-à-dire : considérons le même fibré mais avec une fibre différente : le groupe structural G lui-même. On construit alors le fibré $P \times_G F$ associé à P en considérant l'action de G sur F déterminée par le type de E. Ce fibré a même base, même type et mêmes fonctions de transition que E. Les fibrés sont alors isomorphes. Notez cependant que cette construction dépend de l'existence du fibré principal P. Il est donc nécessaire de considérer que le fibré est fortement lisse. □

Annexe C

Calcul différentiel réel

C.1 Calcul différentiel réel usuel

Nous allons prouver, en suivant le livre [Bertram 2011], que les classes cubiques réelles $\mathcal{C}^{[k]}_{\mathbb{R}}$, sont équivalentes en dimension finie aux classes usuelles, notées $\mathcal{C}^k$.

Soient V et W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème C.1.1 (Relation fondamentale entre les calculs différentiel et intégral)**.** *Soit une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tous r et s dans I,*

$$\gamma(r) - \gamma(s) = \int_s^r \gamma'(t)dt.$$

Corollaire C.1.2 (Représentation intégrale de la pente)**.** *Soit $f : U \subset V \to W$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la pente de f admet la représentation intégrale suivante : pour tous x dans U, v dans V et t dans $\mathbb{R}^\star$ tels que le segment $[x, x+tv]$ appartienne à U,*

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \int_0^1 (\partial_v f)(x + stv)ds,$$

où $\partial_v f(x) := df(x)v$.

Démonstration. Nous pouvons appliquer le théorème précédent à la courbe $\gamma(\lambda) := f(x+\lambda tv)$, $r = 0$, $s = 1$ et on obtient $\gamma'(s) = \partial_{tv} f(x+stv) = t\partial_v f(x+tv)$ par linéarité de la différentielle. On divise par $t \neq 0$ et on obtient le résultat. □

Théorème C.1.3 (Théorème de la pente)**.** *Soit $f : U \subset V \to W$ une application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est de classe $\mathcal{C}^1$,*
2. *f est de classe $\mathcal{C}^{[1]}_{\mathbb{R}}$.*

Dans ce cas, $df(x)$ est la différentielle usuelle : $df(x)v = \lim_{t \mapsto 0} \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t}$.

Démonstration. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors on définit l'application $f^{[1]}$ de la manière suivante :

$$f^{[1]}(x, v, t) := \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

pour tout t est non nul et
$$f^{[1]}(x,v,0) := \partial_v f(x).$$
L'application $f^{[1]}$ est clairement continue sur $U^{]1[}$ car f est continue. Montrons qu'elle est continue aux points de la forme $(x,v,0)$. Au voisinage d'un point $(x,v,0)$, la représentation intégrale
$$f^{[1]}(y,w,r) = \int_0^1 (\partial_w f)(y+srw)ds$$
est vérifiée, ce qui garantit la continuité du membre de gauche sur le voisinage du point $(x,v,0)$. Réciproquement, si f est de classe $\mathcal{C}^{[1]}_{\mathbb{R}}$, alors la dérivée directionnelle $\partial_v f(x)$ existe et vaut $f^{[1]}(x,v,0)$. La continuité de $f^{[1]}$ implique celle de l'application
$$U \times V \to W, \quad (x,v) \mapsto \partial_v f(x),$$
ce qui prouve que f est bien de classe $\mathcal{C}^1$. □

Corollaire C.1.4. *Soit $f : U \subset V \to W$ une application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est de classe $\mathcal{C}^k$,*
2. *f est de classe $\mathcal{C}^{[k]}_{\mathbb{R}}$.*

C.2 Calcul différentiel au sens de Shurygin

Dans l'article [Scheffers 1893], Scheffers a défini une notion de lissité sur les algèbres réelles $\mathbb{A}$, commutatives associatives. Shurygin a décrit la structure locale des applications lisses sur $\mathbb{A}$, notamment dans l'article [Shurygin 1993].

Définition C.2.1. *Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et associative. Soient V et W deux $\mathbb{A}$-modules. Soit U un ouvert dans V. On dit qu'une application $f : U \to W$ de classe $\mathcal{C}^{[k]}_{\mathbb{K}}$ est* de classe $\mathcal{C}^k_{\mathbb{A}}$ au sens de Shurygin *si sa différentielle en tout point x de U est $\mathbb{A}$-linéaire.*

Exemple C.2.2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{A} = \mathbb{C}$, alors la notion de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ au sens de Shurygin est équivalente à la définition usuelle : une application $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$ au sens de Shurygin si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.

Théorème C.2.3. *Soient k un entier naturel et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre qui soit un anneau de base admissible. Soit une application $f : U \to W$ entre deux $\mathbb{A}$-modules topologiques. Considérons les deux propriétés suivantes :*

(A) : l'application f est de classe $\mathcal{C}^{[k]}_{\mathbb{A}}$

(B) : l'application f est de classe $\mathcal{C}^k_{\mathbb{A}}$ au sens de Shurygin. Alors

1. *(A) implique (B).*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si V et W sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors (B) implique (A).*

Démonstration. 1. Si $f : U \to W$ est une application de classe $\mathcal{C}^{[k]}_{\mathbb{A}}$, alors f est clairement de classe $\mathcal{C}^{[k]}_{\mathbb{K}}$ et de plus, sa différentielle est $\mathbb{A}$-linéaire d'après le théorème 3.1.4, avec $\mathbb{K}$ remplacé par $\mathbb{A}$.

2. (a) Montrons dans un premier temps que f est de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{[1]}$. En utilisant une preuve analogue à celle du lemme C.1.2, et puisque la différentielle est $\mathbb{A}$-linéaire, nous obtenons, pour tout $t \in \mathbb{A}^{\times}$,

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \int_0^1 \partial_v f(x+stv)ds,$$

le membre de droite étant continu en (x, v, t). Alors la pente admet un prolongement continu $f^{[1]}(x,v,t) := \displaystyle\int_0^1 \partial_v f(x+stv)ds$ et f est de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{[1]}$.

(b) Montrons que f est de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{[2]}$. La seule chose à prouver d'après le point précédent est que la différentielle de $f^{[1]}$ est $\mathbb{A}$-linéaire.

$$\begin{aligned} df^{[1]}(x,v,t)(x',v',t') &= \int_0^1 \Big(\partial_{x'}\partial_v f(x+stv) + \partial_{v'} f(x+stv) \\ &\quad + \partial_{stv'}(\partial_v f)(x+stv) + \partial_{st'v}\partial_v f(x+tv)\Big)ds \\ &= \int_0^1 \Big(\partial_{x'}\partial_v f(x+stv) + \partial_{v'} f(x+stv) \\ &\quad + st\partial_v(\partial_{v'} f)(x+stv) + st'\partial_v\partial_v f(x+tv)\Big)ds, \end{aligned}$$

d'après le lemme de Schwarz et la $\mathbb{A}$-linéarité de la différentielle de f. L'application $df^{[1]}(x,v,t)$ est donc $\mathbb{A}$-linéaire.

(c) La preuve pour les classes supérieures est similaire.

□

Le point important dans la preuve du (2) est qu'il faut considérer un cadre dans lequel le corollaire C.1.2 de représentation intégrale de la pente est valable. Ainsi, ce résultat est encore vrai si V et W sont des espaces de Banach, ou même des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Corollaire C.2.4. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, si une application $f : U \to W$ de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{[\infty]}$ est de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{1}$, alors f est de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{\infty}$.*

Démonstration. Si f est de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{1}$ au sens de Shurygin, alors sa différentielle est $\mathbb{A}$-linéaire. Comme f est de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{[\infty]}$, f est de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{\infty}$ au sens de Shurygin et donc de classe $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}^{[\infty]}$. □

Index

Nomenclature

A. Notations générales

$\boldsymbol{\alpha}$ multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $1 \leq i \leq k$

$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\alpha}}$ $a_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\alpha_n}$

I sous-ensemble de $\{1, \ldots, k\}$

$|I|$ cardinal du sous-ensemble I de $\{1, \ldots, k\}$

$|\boldsymbol{\alpha}|$ somme $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ où $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$

$\bigsqcup$ union disjointe

Σ_k groupe symétrique, page 73

$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}}$ $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}} := (\underbrace{v_1, \ldots, v_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{v_k, \ldots, v_k}_{\alpha_k})$ (v_i apparaissant α_i fois), où $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_k)$

B. Notions topologiques

$\mathbb{K}$ anneau de base admissible (commutatif unitaire et topologique de groupe unité $\mathbb{K}^\times$ ouvert dense) , page 49

U ouvert du $\mathbb{K}$-module topologique V

V $\mathbb{K}$-module topologique

W $\mathbb{K}$-module topologique

C. Calcul différentiel

C.1 Variables

$\boldsymbol{s}$ multi-variable simpliciale de temps $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_k)$

$\boldsymbol{t}$ multi-variable cubique de temps $\boldsymbol{t} = (t_I)_{I \subset \{1,\ldots,k\}}$

$\boldsymbol{u}$ multi-variable cubique d'espace $\boldsymbol{u} = (u_I)_{I \subset \{1,\ldots,k\}}$

$\boldsymbol{v}$ multi-variable simpliciale d'espace $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_k)$

$\boldsymbol{x}$ multi-variable simpliciale d'espace $\boldsymbol{v} = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ avec point base x_0

C.2 Domaines

C.3 Applications

C.4 Foncteurs

D. Algèbres de Weil

D.1 $\mathbb{K}$-algèbres de Weil

D.2 Morphismes d'algèbres de Weil

E. Fibrés de Weil

E.1 Construction

F. Connexions de Weil

G. Extension de fibrés

H. Connexions de type Ehresmann

I. Applications polynomiales

J. Variétés

K. Fibrés

L. Groupes et algèbres de Lie

Bibliographie

[Bertram 2008] Bertram, Wolfgang, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings*, Memoirs of the AMS, volume **192**, number 900 (2008). arXiv : math.DG/0502168

[Bertram 2010] Bertram, Wolfgang, *Simplicial differential calculus, divided differences, and construction of Weil functors*, to appear in Forum Math., arxiv : math.DG/1009.2354

[Bertram 2011] Bertram, Wolfgang, *Calcul différentiel topologique élémentaire*, Calvage et Mounet, Paris, 2011.

[Bertram, Glöckner, Neeb 2004] Bertram, Wolfgang ; Glöckner, Helge and Neeb Karl-Hermann, *Differential Calculus over general base fields and rings*, Expositiones Mathematicae 22, 2004, p.213 -282.

[Besse 1978] Besse, Arthur, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, avec des appendices de D. B. A. Epstein, J.-P. Bourguignon, L. Bérard-Bergery, M. Berger et J. L. Kazdan, Springer, 1978.

[Bourbaki 1971] Bourbaki, Nicolas, *Algèbre. Chapitres 4-5*, Hermann, Paris, 1971.

[Cartan 1923] Cartan, Élie, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie)*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 40, 1923, p.325-412.

[Cartan 1926] Cartan, Élie, *Espaces à connexion affine, projective et conforme*, Acta Mathematica 48, 1926, p.1-42.

[Certaine 1943] Certaine, Jeremiah, *ternary operation* $(abc) = ab^{-1}c$ *of a group*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 49, Number 12 (1943), p.869-877.

[Demazure, Gabriel 1970] Demazure, Michel et Gabriel, Pierre, *Groupes algébrique*, Paris, 1970.

[Dombrowski 1962] Dombrowski Peter,*On the Geometry of the Tangent Bundle*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 210, 1962, p.73-88.

[Doupovec, Kolář 2000] Doupovec, Miroslav and Kolář, Ivan *Natural transformations of separated jets*, Arch. Math. (Brno) 36 (2000), p.297-303.

[Eck 1986] Eck D.J., *Product-preserving functors on smooth manifolds*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 42, 1986, 133-140.

[Ehresmann 1950] Ehresmann, Charles, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Toplogie, Bruxelles, 1950, p.29-55.

[Ehresmann 1951] Ehresmann, Charles, *Les prolongements d'une variété différentiable*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 233, 1951, p.598-600.

[Eilenberg, Mac Lane 1954] Eilenberg, Samuel et Mac Lane, Saunders, *On the groups $H(\Pi, n)$, II - Methods of computation*, Annals of Mathematics Volume 70, no. 1, 1954.

[Fermat 1636] Fermat, Pierre de, *Œuvres de Fermat*, Gauthier-Villars, tome 3, 1896, p.121-123.

[Kainz, Michor 1987] Kainz, G. et Michor, P. *Natural transformations in differential geometry*, Czechoslovak Mathematical Journal, 37 (112), 1987, p.584-607.

[Husemoller 1966] Husemoller Dale, *Fiber Bundles*, Springer, 1966.

[Kobayashi 1957] Kobayashi, Shoshichi, *Theory of Connections*, Annali di Matematica Pura ed Applicata 43, 1957, p.119-194.

[Kobayashi, Nomizu 1963] Kobayashi, Shoshichi et Nomizu, Katsumi, *Foundations of Differential Geometry, I*, 1963.

[Kobayashi 1972] Kobayashi, Shoshichi, *Transformations Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Kock 1981] Kock, Anders, *Synthetic Differential Geometry*, London Mathematical Society Lecture Notes **51**, Cambridge, 1981.

[Kolář, Michor, Slovák 1993] Kolář, Ivan ; Michor, Peter W. et Slovák, Jan, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, Berlin, 1993.

[Kolář 2008] Kolář, Ivan, *Weil bundles as generalized jet spaces*, pp. 625-664 in : D. Krupka and D. Saunders (eds.), Handbook of Global Analysis, Elsevier, Amsterdam, 2008.

[Kriegl, Michor 1996] Kriegl, Andreas et Michor, Peter W. *Product preserving functors of infinite dimensional manifolds*, Archivum Mathematicum (Brno) 32, 4,1996, p.289-306.

[Kriegl, Michor 1997] Kriegl, Andreas et Michor, Peter W. *The Convenient Setting of Global Analysis. Mathematical Surveys and Monographs*, Volume : 53, American Mathematical Society, Providence, 1997.

[Kureš 2000] Kureš, M., *On the simplicial structure of some Weil bundles*, Rend. del Circ. Mat. Palermo 63, 2000, p.131-140.

[Kureš, Mikulski 2004] Kureš, M. et Mikulski W.M., *Natural operators lifting vector fields to bundles of Weil contact elements*, Czechoslowak Mathematical Journal 54 (129) (2004), p.855-867.

[Lavendhomme 1987] Lavendhomme, René, *Leçons de géométrie différentielle synthétique naïve*, Ciaco, 1987.

[Lang 1999] Lang, Serge, *Fundamentals of Differential Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 191, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Loos 1969] Loos, Ottmar, *Symmetric spaces I : Basic Theory*, Benjamin, New York, 1969.

[Loos 1975] Loos, Ottmar, *Jordan Pairs*, Lecture Notes in Mathematics, 460, Berlin, 1975.

[Luciano 1988] Luciano, O.O., *Categories of multiplicative functors and Weil's infinitely near points*, Nagoya Mathematical Journal, volume 109, 1988, p.69-89.

[Morimoto 1976] Morimoto, Akihiko, *Prolongation of connections to bundles of infinitely near points*, Journal of Differential Geometry Volume 11, Number 4 (1976), p.479-498.

[Moerdijk, Reyes 1991] Moerdijk, Ieke et Reyes, Gonzalo E., *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer, 1991.

[Muñoz, Muriel, Rodríguez 2000] Muñoz J. ; Muriel F.J. et Rodríguez J., *Weil bundles and jet spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal 50 (125) (2000), no. 4, p.721-748.

[Reinhart 1983] Reinhart, B.L., *Differential Geometry of Foliations - The Fundamental Integrability Problem*, Springer, Berlin 1983.

[Roby 1963] Roby, Norbert, *Lois polynomes et lois formelles en théorie des modules*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3è série, tome 80, no. 3, 1963.

[Scheffers 1893] Scheffers Georg, *Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen komplexen Funktionen*, Berichte Sächs. Akad. Wiss., 1893, Bd. 45, p.828-842.

[Serre 1965] Serre, Jean-Pierre, *Lie Algebras and Lie groups*, Benjamin, New York, 1965.

[Shirokov 1981] Shirokov, A.P., *The geometry of tangent bundles and spaces over algebras* Journal of Soviet Mathematics, 1983, 21 :2, p.151-177.

[Shurygin 1993] Shurygin, V.V., *Manifolds over algebras and their application in the geometry of jet bundles*, Russian Mathematical Surveys (Uspekhi mat. nauk), vol. 48, issue 2 (290), 1993, p.75-106.

[Shurygin 1999] Shurygin, V.V., *The structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras*. Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 5, 1999, p.29-55.

[Shurygin 2002] Shurygin, V.V., *Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles*. Journal of Mathematical Science vol. 108, no. 2, 2002, p.249-294.

[Shurygin 2010] Shurygin, V.V., *Some aspects of the theory of manifolds over algebras and Weil bundles* Journal of Mathematical Sciences, vol. 169, no. 3, 2010, p.315-341.

[Weil 1953] Weil, André, *Théorie des points proches sur les variétés différentiables*, Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg 1953, p.111-117 (dans : A. Weil, Œuvres scientifiques, Vol. 2, Springer, New York 1980, p.103-109).

[Weyl 1918] Hermann, Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Springer, Berlin, 1918.

[White 1982] White, J.E., *The Method of Iterated Tangents with Applications in Local Riemannian Geometry*, Pitman, Boston 1982.

[Xantcha 2011] Xantcha, Qimh Richey, *Polynomial Maps of Modules*, arXiv :1112.0991v1